

Tutti i numeri dispari possono essere utilizzati come cateto minore di un triangolo rettangolo in cui il cateto maggiore è pari alla metà, del numero dispari al quadrato ridotto di una unità e l'ipotenusa è pari alla metà, del numero dispari al quadrato aumentato di una unità.

O anche: per ogni numero naturale dispari esistono due numeri interi e consecutivi la cui differenza dei quadrati è pari al quadrato del numero dispari.

Ovvero:

detto d il numero dispari e costruiti $p = (d^2 - 1) / 2$ e $q = (d^2 + 1) / 2 = p + 1$

il triangolo d, p, q è rettangolo.

Infatti:

$$d^2 + p^2 = q^2$$

$$p^2 = (d^2 - 1)^2 / 4 = (d^4 - 2d^2 + 1) / 4$$

$$d^2 + p^2 = d^2 + (d^4 - 2d^2 + 1) / 4 = (4d^2 + d^4 - 2d^2 + 1) / 4 = (d^4 + 2d^2 + 1) / 4 = (d^2 + 1)^2 / 4 = q^2$$

esempi :

d	p	q=p+1
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
...

Come corollario si può anche affermare che in un triangolo rettangolo con a e b cateti e c ipotenusa, in cui i cateti non hanno fattori comuni, i due cateti sono uno intero pari ed uno intero dispari.

Non possono essere entrambi pari altrimenti avrebbero come comune divisore 2.

Non possono essere entrambi dispari perchè se così fosse si avrebbe che :

$c^2 = a^2 + b^2$; poichè sono entrambi dispari per ipotesi, poniamo $a = 2k + 1$ e $b = 2h + 1$ con k e h interi ;

si ha :

$c^2 = (2k + 1)^2 + (2h + 1)^2$ ma se c^2 è pari (perchè somma di due numeri dispari), allora $c = 2j$ quindi possiamo scrivere :

$c^2 = 2^2 j^2 = (2k + 1)^2 + (2h + 1)^2$ dividendo entrambi i termini per 2 e sviluppando i quadrati tra parentesi, si ha :

$$2j^2 = 2k^2 + 2k + 2h^2 + 2h + 1$$

come si può vedere nella espressione sopra il termine alla sinistra è sicuramente pari mentre il termine alla destra è sicuramente dispari. Quindi l'ultimo passaggio ci dice che non è possibile. Quindi l'ipotesi che entrambi i cateti siano dispari non può essere vera.