Dimostrazione del teorema di Fermat

Di seguito è riportata una sintetica ed elegante dimostrazione del cosiddetto ultimo teorema di Fermat; peccato che, sebbene porti a dimostrare il teorema in modo apparentemente corretto, contiene delle ipotesi che, forse sono vere ma non sono verificate e pertanto tutta la dimostrazione non è valida. Comunque lo spunto potrebbe essere buono per trovare le verifiche opportune alle ipotesi che sono alla base della correttezza della dimostrazione.

Non è improbabile che anche Fermat avesse immaginato questa dimostrazione nella sua nota "lo spazio a margine della pagina ..." ma che non l'avesse poi formalizzata correttamente.

Tesi

l'equazione:

$c^n = a^n + b^n$ (1)

è verificata per a, b e c ed n interi positivi solo per $n \leq 2$.

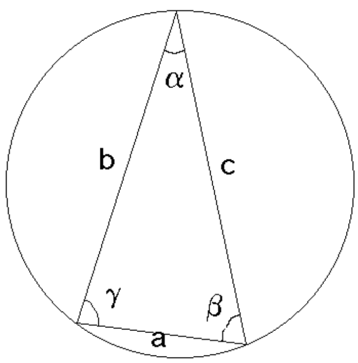
Dimostrazione

Ovviamente si considera il caso che i tre termini a, b e c **non abbiano fattori in comune**.

Si ipotizza, inoltre, senza perdere di generalità che:

$a < b < c < a+b$ (si omette per ovvietà la dimostrazione dell'ultimo passaggio). (2)

I tre numeri a, b e c soddisfano certamente le condizioni per la costruzione di un triangolo.



Inoltre possiamo sicuramente ipotizzare che γ sia diverso da $\pi/2$ ed anche minore di tale valore; infatti, in tal caso il triangolo sarebbe un triangolo rettangolo e la (1) sarebbe soddisfatta per n=2 ed ovviamente non potrebbe essere soddisfatta con gli stessi numeri (a,b,c) per n>2; si omette per ovvietà la dimostrazione dell'ultima affermazione).

Riscriviamo la (1) nel formato:

$c = a * a^{n-1}/c^{n-1} + b * b^{n-1}/c^{n-1}$ (1a)

Dalla trigonometria sappiamo che

$c = a*\cos\beta + b*\cos\alpha$ (1b)

Poiché abbiamo ipotizzato che a, b e c non abbiano fattori in comune, affinché le due espressioni (1a) e (1b) siano entrambe verificate, deve essere vero che i termini che

moltiplicano i fattori a e b nelle due equazioni siano uguali.

Ovvero anche il sistema di equazioni (1a) e (1b) che di seguito si riporta,

$$\begin{cases} c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha \\ c = a \cdot (\frac{a^{(n-1)}}{c^{(n-1)}}) + b \cdot (\frac{b^{(n-1)}}{c^{(n-1)}}) \end{cases}$$

ricordando che a, b e c non hanno fattori in comune, e poiché il numero c può essere espresso come combinazione lineare di altri due numeri primi tra loro solo in un modo altrimenti avrebbe fattori in comune, ha soluzione se e solo se:

$a^{n-1}/c^{n-1} = \cos\beta$ (2a)

e

$b^{n-1}/c^{n-1} = \cos\alpha$ (2b)

Ma dal teorema del coseno sappiamo che:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac*\cos\beta$ (3a)

ovvero anche:

$\cos\beta = (b^2 - a^2 - c^2)/(-2ac)$ (3b)

Sostituendo nella (2a) il valore di $\cos\beta$ ottenuto dalla (3b) si ottiene:

$a^{n-1}/c^{n-1} = (b^2 - a^2 - c^2)/(-2ac)$ (4a)

ovvero, sviluppando e semplificando:

$2\ a^n = (c^2 + a^2 - b^2) * c^{n-2}$ (4b)

La (4b) afferma che a^n ha dei fattori in comune con c^{n-2} e quindi con c cosa non vera per le ipotesi; quindi la (1) non è vera a meno che n=2 nel qual caso $c^{n-2} = 1$ e la (4b) risulta vera per il teorema di Pitagora quando a, b e c sono rispettivamente i due cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

Nota: **l'affermazione sopra scritta in rosso** **potrebbe essere vera ma non è verificata** e pertanto fa decadere la validità della dimostrazione. Ciò non toglie che qualora fosse verificata la dimostrazione sarebbe corretta. Da ciò le due equazioni **(2a) e (2b) sono da verificare** nella loro correttezza.