

Analisi

A. *Insufficienza del concetto di punto*

1. Qualche cenno di storia

Nella prima meta' del 1600 divenne piuttosto pericoloso occuparsi di questioni di fede; anche perche' difendere le proprie idee poteva portare al rogo, quindi le menti piu' libere ed originali si volsero alla scienza che, essendo vera di per se', non rendeva necessario il morire per difenderne i principi. Nasce in quegli anni la fisica come disciplina autonoma, e per potersi sviluppare si rivolse all'altra scienza che era gia' nota in quel periodo: la matematica. Pero' la matematica non era adatta per il mondo fisico, infatti appena la matematica veniva applicata a problemi fisici si potevano avere paradossi insolubili. Cio' rese necessario creare un tipo di matematica adatto alla fisica partendo da quella che gia' si conosceva e conservandone, per quanto possibile i risultati acquisiti:

L'Analisi Matematica o Calcolo Infinitesimale

Il concetto di punto non e' adatto al mondo fisico, infatti provate a tracciare un punto: se lo guardo con il microscopio sara' ancora un punto? evidentemente no. Se per magia diventassi piccolissimo tanto da essere piu' piccolo di un atomo potrei ancora pensare un punto piu' piccolo? evidentemente si! Cioe' il concetto base della matematica, quello di punto, che fa coppia con il concetto di numero come avrai visto in Geometria Cartesiana, e' del tutto inadatto per il mondo fisico.

2. I paradossi di Zenone

Della poca praticita' del concetto di punto si erano gia accorti gli antichi, ad esempio [Zenone](#) enuncio' alcuni paradossi irrisolvibili con la matematica tradizionale: il piu' celebre e' quello di Achille (il guerriero piu' veloce dell'antichita' tanto da meritarsi il soprannome di Pie' Veloce) e della tartaruga.

Achille e la tartaruga decidono di fare una gara di corsa, ma siccome Achille e' piu' veloce da' alla tartaruga un vantaggio di ad esempio 100 metri, chi vincerà?

Questo il ragionamento di Zenone.

Mentre Achille percorre i 100 metri che lo separano dalla tartaruga questa fa 10 metri, mentre Achille percorre quei 10 metri la tartaruga percorre un metro, mentre Achille percorre il metro la tartaruga percorre 10 centimetri....

Capisci che ragionando cosi' essendo lo spazio infinitamente divisibile Achille non riuscirà mai a superare la tartaruga.

Qual'e' l'errore nel ragionamento? Il fatto di confondere lo spazio fisico (che non e' infinitamente divisibile) con lo spazio matematico infinitamente divisibile.

Per farti capire che lo spazio fisico non e' infinitamente divisibile prova a pensare che per trovare la circonferenza della terra basta moltiplicarne il raggio per 2 pigreco allora se io prendo il raggio terrestre in metri e pigreco con 10 cifre decimali trovo la circonferenza terrestre con un' approssimazione superiore al diametro di un atomo!

Non essendo lo spazio fisico infinitamente divisibile non sara' possibile usarvi il concetto di punto, ma un concetto piu' efficace anche se piu' grossolano:

L'intervallo

3. Soluzione del problema

Ragioniamo ancora su Achille e la tartaruga: Achille raggiungera' la tartaruga nel punto alla distanza dalla partenza di metri $111,1111\dots$ e siccome il numero e' decimale illimitato e periodico se voglio scriverlo tutto non finiro' mai, pero' alla decima cifra decimale la distanza fra Achille e la tartaruga sara' minore del diametro di un atomo!

Se ora noi al punto sostituiamo un intervallo cosa succedera'? Prima dell'intervallo Achille e' dietro la tartaruga e dopo l'intervallo invece Achille ha superato la tartaruga; Inoltre quest' intervallo posso prenderlo piccolo quanto voglio, Piccolo quanto un elettrone od ancora piu' piccolo!

Ecco quindi la soluzione del problema! Sostituire al concetto di punto il concetto di intervallo infinitesimo e, considerandolo come base potremo riscrivere una matematica adatta ad affrontare il mondo fisico.

4. Conclusioni

Va a merito di Newton e di Leibniz, l'uno dal punto di vista fisico, l'altro dal punto di vista matematico l'aver fondata la nuova scienza; da segnalare l' applicazione della nuova scienza alla meccanica celeste da parte di Newton.

Purtroppo i due scienziati litigarono per la prioritá della scoperta e questo oltre a staccare la scienza inglese da quella europea per due secoli ha portato ad un doppio modo di scrivere le formule e di indicare le nuove operazioni.

Comunque coraggio! Dobbiamo rivedere tutta la matematica alla luce dei nuovi concetti.

B. *Intervalli ed intorni*

Il concetto di intervallo e di Intorno e' essenziale per l'Analisi Matematica. Da notare che se guardiamo le cose da un punto di vista esterno parliamo di intervallo, mentre se assumiamo il punto di vista di un punto dobbiamo parlare di intorno. Quindi la diversita' fra intervallo ed intorno dipende solamente dal **punto di vista**.

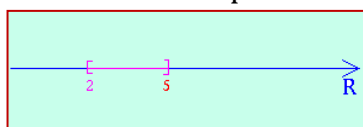
Dal punto di vista di un osservatore esterno parleremo di intervallo, dal punto di vista del punto interno parleremo di intorno:

- Intervalli ed intorni
- Punti di accumulazione
- Punti frontiera
- Punti aderenti

1. Intervalli ed intorni

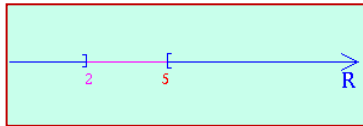
Si definisce **intervallo** sulla retta \mathbb{R} l'insieme di tutti i punti compresi fra due valori dati; ad esempio l'intervallo $2,5$ sara' l'insieme di tutti i punti (numeri) compresi fra 2 e 5.

Se i punti estremi fanno parte dell'intervallo l'intervallo si dice chiuso. $I_{[2,5]}$



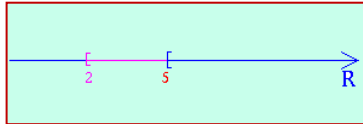
$$I_{2,5} = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 5\}$$

Se i punti estremi non appartengono all'intervallo, allora l'intervallo si dice aperto. $I]2,5[$



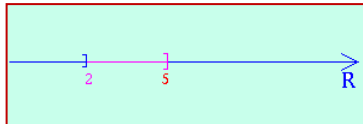
$$I_{2,5} = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 5\}$$

Se appartiene all'intervallo il punto estremo di sinistra e non quello di destra, allora l'intervallo si dice semiaperto a destra. $I[2,5[$



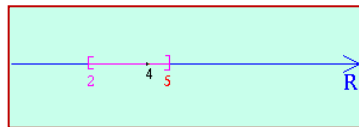
$$I_{2,5} = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 5\}$$

Se appartiene all'intervallo il punto estremo di destra e non quello di sinistra, allora l'intervallo si dice semiaperto a sinistra $I]2,5]$



$$I_{2,5} = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 5\}$$

Come abbiamo parlato di intervalli possiamo parlare di interni riferendoci ad un punto contenuto; ad esempio:



l'intervallo $I[2,5]$ sarà un intorno chiuso del punto 4.

Da notare inoltre che l'intervallo è anche un intorno destro di 2 ed un intorno sinistro di 5. Allo stesso modo si parlerà di interni semiaperti ed aperti.

2. Punti di accumulazione

Un Punto si dice di *accumulazione* per un insieme di punti se qualunque suo intorno contiene sempre almeno un punto dell'insieme diverso dal nostro punto.

Almeno uno vuol dire che, visto che posso prendere infiniti intervalli sempre più piccoli, di punti ne conterrai infiniti.

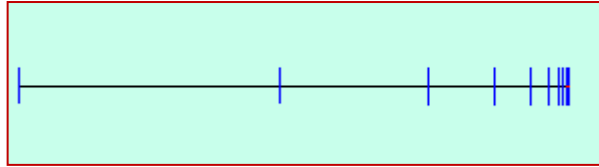
Ad esempio, considero l'insieme formato dai punti $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$

Se provate a procedere, vedete che questi punti tendono a zero; allora si dice che zero è un punto di accumulazione per questo insieme; infatti, per quanto io possa prendere piccolo un intervallo che contenga zero ci sarà sempre un punto della successione diverso da zero contenuto nell'intervallo (anzi ce ne saranno infiniti).

A questo proposito possiamo enunciare un piccolo teorema:

Se un insieme infinito di punti è limitato allora ammette sempre un punto di accumulazione.

Infatti, se l'insieme è limitato, vuol dire che si trova in un intervallo limitato e, se è infinito, io posso dividere l'intervallo a metà e almeno in una metà ci devono essere infiniti punti; posso ancora dividere ancora quella metà a metà e in una parte ci saranno sempre infiniti punti e così via di seguito; quindi poiché in un mezzo intervallino ci saranno sempre infiniti punti allora in quell'intervallino dovrà esserci un punto di accumulazione.



In questa figura il punto di accumulazione e' quello a destra.

3. Punti frontiera

Un punto si definisce *di frontiera* quando appartiene al bordo dell'insieme; da notare che un punto frontiera di un insieme puo' non appartenere all'insieme.

Esempio: se considero l'intervallo chiuso $I_{[2,5]} = [2,5]$, il punto 2 e' un punto frontiera che appartiene all'insieme $I_{[2,5]}$

Se invece considero l'intervallo semiaperto a sinistra $I_{]2,5]} =]2,5]$, il punto 2 non appartiene all'intervallo $I_{]2,5]}$ anche se e' un punto frontiera.

Altro esempio: se considero il cerchio di raggio minore di 5, tutti i punti sulla circonferenza di raggio 5 sono la sua frontiera ma non appartengono al cerchio.

Se invece considero il cerchio di raggio 5 allora anche la circonferenza di raggio 5, cioe' la frontiera, appartiene al cerchio.

Diventa quindi necessario, per non generare confusioni, definire esattamente quando un punto appartiene ad un insieme.

4. Punti aderenti

Un punto si dira' *aderente* (o di aderenza) ad un insieme quando o appartiene all'insieme o e' di accumulazione per l'insieme stesso.

Riprendendo gli esempi della pagina precedente se considero sulla retta \mathbb{R} l'intervallo semiaperto $I_{]2,5]} =]2,5]$, il punto 2 e' un punto frontiera che non appartiene all'insieme $I_{]2,5]}$, pero' e' un punto aderente all'insieme stesso insieme a tutti gli altri punti dell'intervallo $]2,5]$.

Se considero il cerchio di raggio minore di 5, tutti i punti sulla circonferenza di raggio 5 sono la sua frontiera e non appartengono al cerchio pero' sono tutti punti aderenti come i punti all'interno del cerchio.

In pratica per avere tutti i punti di aderenza di un insieme basta chiuderlo, cioe' aggiungervi tutti i punti di accumulazione e considerare tutto l'insieme cosi' ottenuto.

C. *Il concetto di funzione*

Il concetto di funzione e', si puo' dire, il concetto piu' importante per la matematica: infatti la matematica e' cercare le cause, le implicazioni, le conseguenze e l'utilita' di una funzione e' appunto di mostrare il legame che esiste fra cose diverse.

Fra tutte le definizioni di funzioni io preferisco questa che e' stata scelta da un gruppo di persone (fra cui io) in occasione di un corso abilitante seguendo la definizione di Dirichlet: Si definisce *funzione y della variabile x* un legame fra due variabili, una detta variabile indipendente x e l'altra detta variabile dipendente y, tali che abbiano senso le operazioni da effettuare sulla x per ottenere i valori della y e per ogni valore della x corrisponda un solo valore della y.

$$y = f(x)$$

Sulle funzioni ci sarebbe molto da dire, cosa che faremo in altre pagine; intanto distinguiamo fra funzioni empiriche e matematiche:

- Funzioni empiriche
- Funzioni matematiche

1. Funzioni empiriche

Sono quelle funzioni che si possono desumere dalla natura, ad esempio altezza del sole e temperatura, oppure tempo trascorso dalla semina ed altezza di un germoglio. Non hanno una vera forma matematica a meno di non applicarvi appositi modelli matematici; ad esempio in ecologia il legame fra predatori e prede in un ambiente chiuso si può rappresentare mediante un'equazione differenziale.

2. Funzioni matematiche

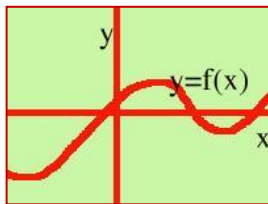
Sono quelle funzioni tali che le operazioni che permettono di passare dal valore della x al valore della y sono di tipo matematico.

Se le operazioni sopraindicate si possono ridurre alle quattro operazioni algebriche, allora la funzione si dice **Algebrica**.

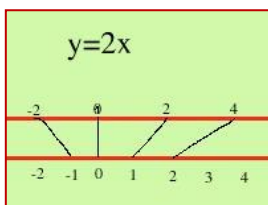
Esempio: $y = x^3 - x^2 - 5x - 3$

In caso contrario la funzione si dice **Trascendente**.

Esempio $y = \log x$ oppure $y = \sin x + \cos x$



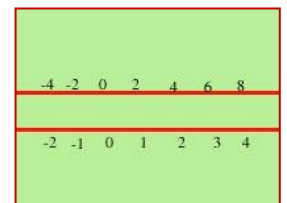
E' utile ricordare, per ben capire il concetto di funzione, che la funzione e' il collegamento esistente fra due variabili, e si può rappresentare, per funzioni reali di variabili reali, mediante il collegamento esistente fra due rette; ora queste rette di solito si rappresentano mediante un sistema di assi ortogonali e la funzione diventa l'insieme dei punti che ad una x fanno corrispondere una y .



Io, personalmente, trovo un po' riduttiva questa idea di funzione e talvolta ad alcune classi particolarmente brave l'ho spiegata in modo (quasi) equivalente come segue:

pensate due rette fra loro parallele, immaginiamo una freccia che ad ogni punto della prima retta mi faccia corrispondere un punto sulla seconda, ed ora

immaginiamo di spostare i punti sulla seconda retta (come se fosse di gomma) in modo che ad ogni punto della prima retta stia di fronte il punto corrispondente sulla seconda, in tal caso la funzione sarebbe come vengono "addensati" i punti sulla seconda retta al variare della x sulla prima retta; bene, mi dirà qualcuno, ma a cosa serve questo ragionamento? serve a capire che la funzione e' qualcosa di più della sua rappresentazione cartesiana: la funzione e' un fenomeno (in senso filosofico) che coinvolge i punti dell'asse delle y (in parole povere e' come si addensano i punti sull'asse delle y) e la curva nel piano cartesiano ne e' solamente una rappresentazione grafica.



3. Campo di esistenza di una funzione

Si definisce **campo di esistenza** (C.E.) di una funzione l'insieme dei valori che posso attribuire alla variabile indipendente x per ottenere il valore della y .

In pratica, il campo di esistenza di una funzione coincide con tutto l'asse x in tutte le funzioni eccetto nei tre casi seguenti:

- Funzioni fratte
- Funzioni irrazionali
- Funzioni logaritmiche

Naturalmente posso cumulare gli effetti ed aver ad esempio una funzione logaritmica fratta.

Qui occorre notare che per eseguire bene gli esercizi e' necessaria una buona conoscenza delle disequazioni.

Per polinomi di grado superiore al secondo non altrimenti scomponibili poi serve anche la **scomposizione di Ruffini**.

a) Il campo di esistenza delle funzioni fratte

Si definisce **funzione fratta** una funzione in cui la x compaia al denominatore.

Consideriamo una funzione fratta:

$$y = \frac{x+1}{x-2}$$

Ricordando che in matematica non e' ammessa la divisione per zero, avremo che il denominatore non potra' mai diventare uguale a zero altrimenti la frazione non avrebbe nessun significato; ne segue che potro' attribuire ad x tutti i valori meno quelli che annullano il denominatore cioe':

$$(x-2) \neq 0$$

Quindi il campo di esistenza sara' dato da:

$$x \neq 2$$

cioe':

C.E. = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$ Il campo di esistenza e' l'insieme degli x appartenenti ad \mathbb{R} , tali che x e' diverso da 2,

oppure in altra notazione:

C.E. = $(-\infty, 2 \cup]2, +\infty)$ Il campo di esistenza e' l'insieme di tutti i punti della retta reale escluso il punto 2.

b) Campo di esistenza per funzioni irrazionali

Si definisce **funzione irrazionale** una funzione in cui la x compaia sotto il segno di radice.

Consideriamo una funzione irrazionale:

$$y = \sqrt{x-3}$$

Poiche' la radice e' definita solo per valori non negativi del radicando, il termine sotto radice dovra' essere maggiore od uguale a zero:

$$(x-3) \geq 0$$

Segue:

$$x \geq 3$$

Quindi il campo di esistenza sarà :

$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$$

Il campo di esistenza è l'insieme degli x appartenenti ad \mathbb{R} , tali che x è maggiore od uguale a 3

oppure in altra notazione:

$$\text{C.E.} = [3, +\infty)$$

Il campo di esistenza è l'insieme di tutti i punti della retta reale maggiori o uguali a 3.

c) Campo di esistenza per funzioni logaritmiche

Una funzione si definisce *logaritmica* se la x compare nell'argomento del logaritmo.

Consideriamo una funzione logaritmica

$$y = \log(x+4)$$

Poiché il logaritmo è definito solo per valori positivi dell'argomento, il termine dentro parentesi dovrà essere maggiore di zero:

$$(x+4) > 0$$

Segue

$$x > -4$$

Quindi il campo di esistenza sarà:

$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$$

Il campo di esistenza è l'insieme degli x appartenenti ad \mathbb{R} tali che x è maggiore di -4 oppure in altra notazione:

$\text{C.E.} =]-4, +\infty)$ Il campo di esistenza è l'insieme di tutti i punti della retta reale maggiori di -4

4. Funzione composta

Dai un'occhiata alle [applicazioni composte](#) a Teoria degli insiemi .

Consideriamo le funzioni:

$$g : A \rightarrow B$$

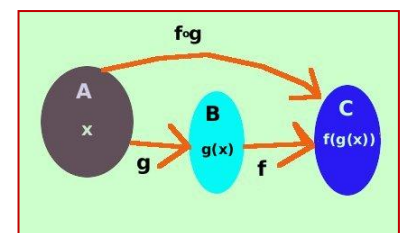
$$f : B \rightarrow C$$

chiameremo *funzione composta* l'applicazione da A a C

$$f \circ g : A \rightarrow C$$

tale che:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$



Non ti spaventare: significa che al posto della x nella prima funzione metti l'espressione della seconda funzione; esempio:

$$f(x) = 2x^2 + 3$$

$$g(x) = \text{sen } x$$

al posto di x in $f(x)$ metto $\text{sen } x$

$$f \circ g(x) = 2(\text{sen } x)^2 + 3$$

$$f \circ g(x) = 2\text{sen}^2x + 3$$

a) Calcolo di funzioni composte

Nell'ipotesi che il codominio della prima funzione coincida col dominio della seconda; allora, come abbiamo già detto, per calcolare la funzione composta basta sostituire al posto della x nella prima funzione l'espressione della seconda funzione.

Altrimenti dovremmo porre opportune condizioni, ma, in prima approssimazione, limitiamoci a semplici esercizi senza troppi legami.

Calcolare la funzione composta $f(g(x))$ date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Esempio 1) $f(x) = 2x + 5$ $g(x) = 4x + 1$ Soluzione:

Al posto della x nella prima funzione metto l'espressione di $g(x)$ della seconda funzione:

$$f(g(x)) = 2(4x+1) + 5$$

eseguo i calcoli:

$$f(g(x)) = 8x + 2 + 5$$

ed ottengo la funzione composta:

$$y = 8x + 7$$

Esempio 2) $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = 2e^x + 1$ Soluzione:

Al posto della x nella prima funzione metto l'espressione di $g(x)$ della seconda funzione

$$f(g(x)) = (2e^x + 1)^2 - 1$$

Eseguo i calcoli:

Calcolo del quadrato:

$$(2e^x + 1)^2 =$$

quadrato del primo termine:

$$(2e^x)^2 = 4e^{2x}$$

doppio del prodotto del primo e del secondo termine:

$$2 \cdot 2e^x \cdot 1 = 4e^x$$

quadrato del secondo:

$$(1)^2 = 1$$

quindi ottengo:

$$(2e^x + 1)^2 = 4e^{2x} + 4e^x + 1$$

$$f(g(x)) = 4e^{2x} + 4e^x + 1 - 1$$

$$f(g(x)) = 4e^{2x} + 4e^x$$

Raccolgo a fattor comune $4e^x$ ed ottengo la funzione composta:

$$y = 4e^x(e^x + 1)$$

5. Funzione inversa

Una funzione e' il legame che esiste fra un dominio ed un codominio. Sotto certe condizioni e' possibile ipotizzare un legame che faccia passare dal codominio al dominio; se questo e' possibile, tale funzione si chiama funzione inversa.

Perché una funzione sia invertibile deve essere iniettiva e suriettiva, oppure puoi anche dire, in modo equivalente, deve essere continua e monotona.

Controlla i seguenti argomenti alla teoria degli insiemi:

- [applicazione iniettiva](#)
- [applicazione suriettiva](#)
- [applicazione inversa](#)

Vediamo alcuni semplici esempi come da una funzione si possa passare alla sua funzione inversa.

Graficamente, da una funzione si puo' ottenere il **grafico della funzione inversa** semplicemente operando un ribaltamento del piano cartesiano attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante; infatti, essendo tale bisettrice di equazione $y = x$, la bisettrice e' la linea (funzione) che **scambia** fra loro le x e le y (funzione identica).

Infatti la funzione:

$$y = x$$

trasforma ogni valore sull'asse x nello stesso valore sull'asse delle y (ad esempio trasforma 3 in 3, 7 in 7, -1 in -1, ...) e quindi del suo grafico faranno parte tutti i punti che hanno uguali la x e la y come:

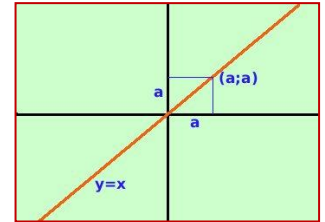
$$(0; 0)$$

$$(3; 3)$$

$$(1,5; 1,5)$$

.....

E tutti questi punti formano la bisettrice del primo e terzo quadrante.



a) Calcolo di funzioni inverse

Vediamo ora alcuni esempi di calcolo di funzioni inverse. Dopo aver controllato che la funzione sia univoca e suriettiva, basta scambiare fra loro le x e le y e poi esplicitare la y . Piu' avanti dovrai vedere che la funzione sia continua e monotona, ma, per ora, accontentiamoci di esercizi elementari, senza troppe condizioni.

Calcolare, se possibile, le funzioni inverse delle seguenti funzioni:

Esempio 1) $y = x - 5$ Soluzione:

La funzione $y=x-5$ e' una retta quindi e' sia iniettiva che suriettiva e di conseguenza e' invertibile.

Scambiamo fra loro la x e la y

$$x = y - 5$$

Esplicito la y :

$$-y = -x - 5$$

Cambio di segno ed ottengo la funzione inversa

$$y = x + 5$$

Esempio 2) $y = 2x - 6$ Soluzione:

La funzione $y=2x-6$ e' una retta quindi e' sia iniettiva che suriettiva e di conseguenza e' invertibile.

Scambiamo fra loro la x e la y

$$x = 2y - 6$$

Esplicito la y

$$-2y = -x - 6$$

Cambio di segno

$$2y = x + 6$$

divido ogni termine per 2 ed ottengo la funzione inversa:

$$\frac{2y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{6}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} + 3$$

Esempio 3) $y = x^2 - 5$ Soluzione:

La funzione è una parabola quindi è suriettiva ma non iniettiva e di conseguenza per invertirla dobbiamo fare delle restrizioni.

Possiamo anche dire che è continua, ma non è monotona perché è in parte crescente ed in parte decrescente; considerando il vertice ed una metà della parabola la funzione sarà invertibile.

Scambiamo fra loro la x e la y :

$$x = y^2 - 5$$

Esplicito la y :

$$-y^2 = -x - 5$$

Cambio di segno:

$$y^2 = x + 5$$

Estraggo la radice:

$$y = \pm\sqrt{x + 5}$$

Per poterla considerare come funzione inversa considero solamente il radicale positivo

Equivale a dire che partendo dal vertice considero solo metà della parabola; a seconda di quale ramo considero prenderò il radicale positivo oppure negativo; se non si specifica altrimenti si considera sempre il radicale positivo.

$$y = \sqrt{x + 5}$$

Esempio 4) $y = \log x - 2$ Soluzione:

La funzione $y = \log x - 2$ ha come dominio l'insieme delle x maggiori di zero e, in tale dominio è sia iniettiva che suriettiva, e quindi è invertibile.

Puoi anche dire che per $x > 0$ la funzione è continua e crescente e quindi è invertibile.

Scambiamo fra loro la x e la y :

$$x = \log y - 2$$

Esplicito la y :

$$-\log y = -x - 2$$

Cambio di segno:

$$\log y = x + 2$$

Applico l'esponenziale per eliminare il logaritmo:

$$e^{\log y} = e^{x+2}$$

Logaritmo ed esponenziale si elidono:

$$y = e^{x+2}$$

Questa è la funzione inversa limitatamente all'intervallo $x > 0$

b) Importante proprietà delle funzioni inverse

Facendo la composizione di una funzione con la sua inversa si ottiene *sempre* la funzione identica $y = x$.

È chiamata **funzione identica** perché trasforma ogni punto *in se stesso* ed, analiticamente, è la bisettrice del primo e terzo quadrante.

La cosa è importante perché, se consideriamo l'operazione di composizioni fra funzioni, allora la funzione identica rappresenterà per l'operazione l'elemento neutro e quindi potremo riconoscere una struttura algebrica.

Quindi, per vedere se due funzioni sono l'una inversa dell'altra sarà sufficiente farne la composizione e vedere, se come risultato, otteniamo la funzione identica.

Verificare che le seguenti funzioni sono tra loro inverse.

Esempio 1) $y = x - 5$ $y = x + 5$ Soluzione:

Chiamando la prima $f(x)$ e la seconda $g(x)$ possiamo procedere in due modi:

- Calcolo $f(g(x))$
- Calcolo $g(f(x))$

Per esercizio, facciamolo in entrambe i modi.

- Calcolo $f(g(x))$
 Ho $f(x) = x - 5$ $g(x) = x + 5$
 Sostituisco $g(x)$ al posto della x nella $f(x)$
 $f(g(x)) = (x+5) - 5$
 $y = x + 5 - 5$
 $y = x$
- Calcolo $g(f(x))$
 Ho $f(x) = x - 5$ $g(x) = x + 5$
 Sostituisco $f(x)$ al posto della x nella $g(x)$
 $g(f(x)) = (x-5) + 5$
 $y = x - 5 + 5$
 $y = x$

Esempio 2) $y = 2x - 6$ $y = \frac{x}{2} + 3$ Soluzione:

Chiamando la prima $f(x)$ e la seconda $g(x)$ possiamo procedere in due modi:

- Calcolo $f(g(x))$
- Calcolo $g(f(x))$

Per esercizio facciamolo in entrambe i modi:

- Calcolo $f(g(x))$
 Ho $f(x) = 2x - 6$ $g(x) = \frac{x}{2} + 3$
 Sostituisco $g(x)$ al posto della x nella $f(x)$:
 $f(g(x)) = 2\left(\frac{x}{2} + 3\right) - 6$
 $y = x + 6 - 6$
 $y = x$
- Calcolo $g(f(x))$
 Ho $f(x) = 2x - 6$ $g(x) = \frac{x}{2} + 3$
 Sostituisco $f(x)$ al posto della x nella $g(x)$:
 $g(f(x)) = \frac{(2x-6)}{2} + 3$
 $y = x - 3 + 3$
 $y = x$

Esempio 3) $y = x^2 - 5$ $y = \sqrt{x + 5}$ Soluzione:

Siccome abbiamo un radicale dovremo procedere sotto l'ipotesi del radicando maggiore di zero, cioè $x > -5$

Chiamando la prima $f(x)$ e la seconda $g(x)$ possiamo procedere in due modi:

- Calcolo $f(g(x))$
- Calcolo $g(f(x))$

Per esercizio facciamolo in entrambe i modi

- Calcolo $f(g(x))$
 Ho $f(x) = x^2 - 5$ $g(x) = \sqrt{x + 5}$
 Sostituisco $g(x)$ al posto della x nella $f(x)$
 Ho $f(g(x)) = (\sqrt{x + 5})^2 - 5$

Elimino tra loro radice e quadrato:

$$y = x + 5 - 5$$

$$y = x$$

- Calcolo $g(f(x))$

$$\text{Ho } f(x) = x^2 - 5 \quad g(x) = \sqrt{x + 5}$$

Sostituisco $f(x)$ al posto della x nella $g(x)$:

$$g(f(x)) = \sqrt{(x^2 - 5) + 5}$$

$$y = \sqrt{x^2}$$

Elimino il quadrato con la radice:

$$y = x$$

Esempio 4) $y = \log x - 2$ $y = e^{x+2}$ Soluzione:

Anche qui consideriamo i nostri calcoli con la restrizione $x > 0$ per poter avere il logaritmo ben definito.

Chiamando la prima $f(x)$ e la seconda $g(x)$ possiamo procedere in due modi:

- Calcolo $f(g(x))$
- Calcolo $g(f(x))$

Per esercizio facciamo in entrambe i modi.

- Calcolo $f(g(x))$

$$\text{Ho } f(x) = \log x - 2 \quad g(x) = e^{x+2}$$

Sostituisco $g(x)$ al posto della x nella $f(x)$:

$$f(g(x)) = \log(e^{x+2}) - 2$$

Posso eliminare tra loro esponenziale e logaritmo:

$$y = x + 2 - 2$$

$$y = x$$

- Calcolo $g(f(x))$

$$\text{Ho } f(x) = \log x - 2 \quad g(x) = e^{x+2}$$

Sostituisco $f(x)$ al posto della x nella $g(x)$:

$$g(f(x)) = e^{(\log x - 2) + 2}$$

$$y = e^{\log x}$$

Elimino tra loro logaritmo ed esponenziale:

$$y = x$$

B. I Limiti

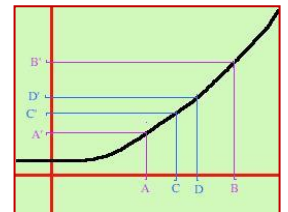
Se la funzione è il concetto di base per la matematica il limite è il concetto di base per le funzioni; infatti, è il limite che ci permette di superare i paradossi dovuti all'insufficienza del concetto di punto perché ci permette di utilizzare il concetto di intervallo.

Teoricamente il limite è una cosa molto semplice; se io considero un piccolo intervallo sull'asse delle x , ad esso corrisponderà un intervallo più o meno piccolo sull'asse delle y ; se quando restringo l'intervallo sull'asse delle x mi si restringe anche l'intervallo corrispondente sull'asse delle y , allora ho un limite.

In figura all'intervallo in viola AB corrisponde l'intervallo in viola $A'B'$ ed all'intervallo più piccolo in blu CD corrisponde un intervallo più piccolo in blu $C'D'$; allora posso avvicinarmi ad un punto quanto voglio; basta rendere sempre più piccolo l'intervallo sulle x .

Poiché l'intervallo posso renderlo piccolo quanto voglio, allora posso sostituirlo al concetto di punto.

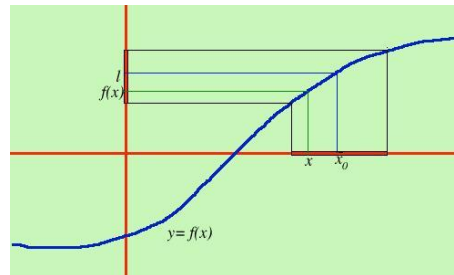
Il problema è tradurre un concetto così semplice in linguaggio matematico.



4. Limite finito di una funzione in un punto

Il concetto espresso nella pagina precedente e' abbastanza comprensibile, diventa piu' complicato l'esprimerlo in forma matematica.

Per prima cosa, siccome si parla di limite di una funzione e la funzione e' come variano i punti sull'asse y , partiremo da un intervallo sull'asse y e diremo che allo stringersi di un intervallo sulle y avvicinandosi ad un valore l si stringe anche l'intervallo corrispondente sulle x avvicinandosi ad x_0 .



Per dire questo consideriamo sull'intervallo delle X (quello marcato piu' scuro) un qualunque punto x a cui corrisponde $f(x)$ sull'asse Y . Per rendere piccoli gli intervalli bastera' dire che deve essere piccola la distanza tra $f(x)$ ed l e contemporaneamente la distanza tra x ed x_0 ; ora la distanza si ottiene facendo la differenza fra le coordinate, ma essendo sempre positiva, dovra' essere presa in modulo. Quindi bastera' dire che quando la distanza sulle Y e' minore di un numero piccolissimo anche la distanza sulle X dovra' essere minore di un numero piccolissimo, od in modo equivalente quando $f(x)$ si avvicina ad l anche x si avvicina ad x_0 .

Ora siamo pronti a dare la definizione matematica:

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite finito l per x tendente ad x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se per ogni numero positivo ϵ (epsilon) piccolo a piacere esiste un numero δ_ϵ (delta epsilon) cioe' delta dipendente da epsilon) tale che da

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad \text{segua} \quad |x - x_0| < \delta_\epsilon$$

$|f(x) - l| < \epsilon$ e' un intervallo **B** sull'asse y .

$|x - x_0| < \delta_\epsilon$ e' un intervallo **A** sull'asse x , intorno completo del punto x_0 con δ_ϵ numero dipendente da ϵ .

Quindi si puo' anche dire che quando la x appartiene ad **A** allora $f(x)$ appartiene ad **B**.

od anche: quando x si avvicina ad x_0 allora $f(x)$ si avvicina ad l .

Esercizi (sulla definizione di limite)

Intuitivamente, quando l'intervallo sulla y $|f(x) - l|$ diventa piccolissimo $< \epsilon$ anche l'intervallo sulla x $|x - x_0|$ diventa minore di una quantita' dipendente dal primo $< \delta_\epsilon$ e questo sara' il metodo che useremo negli esercizi.

Iniziamo da un esercizio molto semplice:
ad esempio proviamo a dimostrare che :

$$\lim_{x \rightarrow 3} x+2 = 5$$

Devo dimostrare che se prendo un intorno del punto 5 sulle y avro' in corrispondenza un intorno del punto 3 sulle x tali che quando si stringe il primo intorno si stringe anche il secondo: cioe'

$$|f(x)-l| < \epsilon \text{ segue } |x-x_0| < \delta_\epsilon$$

Faccio la funzione meno il limite in modulo:

$$|(x+2)-5| < \epsilon$$

Il significato del modulo e' che cio' che e' dentro ha valore positivo, cioe' se e' positivo, resta lo stesso segno; se e' negativo, devo cambiarlo di segno in modo che diventi positivo.

Cio' significa che il termine dentro il modulo deve essere piu' grande di $-\epsilon$ e minore di ϵ quindi posso scrivere:

$$x+2-5 < \epsilon \text{ e } x+2-5 > -\epsilon$$

oppure utilizzando una notazione divenuta ormai di uso comune:

$-\epsilon < x+2-5 < \epsilon$ (ricordando pero' che si tratta di due disequazioni da risolvere contemporaneamente).

Risolviamo:

$-\epsilon < x-3 < \epsilon$ (porto il -3 dall'altra parte nelle due disequazioni cambiandolo di segno)

$3-\epsilon < x < 3+\epsilon$ e questo e' un intorno del punto 3 sulle x e se ϵ diventa piccolo anche l'intervallo si stringe; quindi il limite e' proprio 5.

5. Cenni sul limite di una successione

a) Perche' il limite di una successione di numeri reali

Possiamo applicare il concetto di limite ad una successione di numeri reali. Per costruire la matematica possiamo prendere come base i numeri Naturali e poi sviluppare tutta la teoria (metodo classico), oppure possiamo prendere come base il concetto di successione (metodo della scuola russa); il risultato e' del tutto equivalente Poiche' i numeri reali (e quindi la retta reale) possono essere pensati come limiti di una successione di numeri razionali il concetto di limite diviene una proprieta' intrinseca dei numeri reali stessi.

b) Limite (finito) di una successione convergente

Facciamo per semplicita' un esempio numerico e consideriamo la successione:

$$1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots$$

Si vede subito che procedendo nei termini ci avviciniamo sempre di piu' al valore limite zero.

Per impostare la definizione di limite dobbiamo dire che prendendo termini piu' avanzati la differenza fra questi termini e il limite diventera' sempre piu' piccola.

Se non sei convinto prova a fare la differenza fra il quinto termine e il limite(zero), poi fra il decimo e il limite, vedrai che la differenza diventa piu' piccola man mano che prendi un termine di ordine superiore.

Consideriamo ora la successione generica:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$$

per indicarla consideriamo il suo termine generico a_n

Diremo che la successione a_n ammette limite finito l per $n \rightarrow \infty$ e scriveremo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

Se fissato un numero ϵ piccolo a piacere e' possibile trovare un termine della successione tale che per quel termine e tutti i suoi successivi valga la relazione:

$$|a_n - l| < \epsilon$$

c) Limite di una successione divergente

Per fare il limite di una successione divergente rifacciamoci al concetto che si ha un limite quando avendo un intervallo che si contrae, anche l'intervallo corrispondente si deve contrarre; ora non e' necessario che l'intervallo sia un intorno di un valore finito, ma puo' anche essere un intorno di infinito.

Rifacciamoci al caso che la successione tenda a $+\infty$.

Allora potremo dire che la successione:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$$

e' divergente (ammette limite infinito) per $x \rightarrow \infty$ e scriveremo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

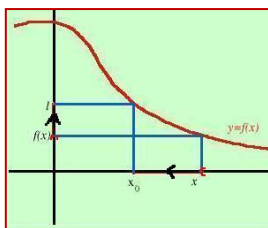
Se preso $n > M$, esiste in sua corrispondenza un intorno di infinito dipendente da M tale che il termine a_n ed i suoi successivi siano tutti contenuti in quell'intorno di infinito o in modo piu' algebrico.

Se preso un numero positivo M e' possibile trovare un termine della successione a_k tale che per esso e tutti i termini che lo seguono (cioe' che hanno indice maggiore di K) valga la relazione:

$$a_k > M$$

6. Limite destro e sinistro

Per capire bene il concetto di limite destro (sinistro) consideriamo cos'e' un intervallo per un punto interno: e' un intorno e per essere un intorno non e' necessario che il punto sia al centro dell'intervallo, anzi il punto puo' essere spostato anche fino al bordo se l'intervallo e' chiuso ed in tal caso avremo un intorno destro o sinistro del punto.



Ora quando considero il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ invece di considerare tutto un intervallo che contenga x_0 possiamo considerarne un intorno destro (sinistro) ed in tal caso sull'asse y corrispondera' un intorno destro o sinistro di l ma cio' non cambiera' nulla: infatti allo stringersi dell'intervallo sull'asse delle y corrispondera' lo stringersi dell'intorno sull'asse delle x .

Cioe' quando $f(x)$ si avvicina ad l x si avvicina ad x_0 .

Definizione matematica:

Si dice che la funzione $y=f(x)$ ammette limite finito destro l per x tendente ad x_0^+ e si scrive:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ se esiste un numero positivo ϵ (epsilon) piccolo a piacere tale

che da

$|f(x)-l| < \epsilon$ segue $x-x_0 < \delta_\epsilon$ (delta epsilon cioè delta dipendente da epsilon)

Note: x tendente ad x_0+ significa che mi avvicino ad x da destra, cioè dalla parte dei valori positivi.

7. Limite infinito

Il concetto di infinito è sempre stato un po' la bestia nera della matematica e col concetto di limite si può affrontare in modo abbastanza efficace: il limite mi mette in relazione due intervalli che si contraggono contemporaneamente: allora perché non applicare questo concetto anche ad un intorno di infinito? Il problema è che non posso far riferimento ad un intorno e nemmeno ad un intervallo, però posso fare riferimento al bordo dell'intervallo che, man mano che si **stringe**, assumerà valori sempre più grandi in valore assoluto.

In pratica, quando ho un intervallo che si stringe verso infinito devo dire che il suo valore di bordo risulta maggiore di un qualunque numero (di solito indicato con M per le y ed N per le x) grande a piacere se andiamo verso $+\infty$ oppure minore di un numero qualunque numero negativo grande a piacere in valore assoluto se ci spostiamo verso $-\infty$. Sarebbe bene che provassi ora a ricavare tu i vari casi senza studiarli a memoria, comunque, magari per esercizio, di seguito ti elenco i casi possibili.

Distinguiamo tre casi:

- limite ∞ per $x \rightarrow c$
- limite l per $x \rightarrow \infty$
- limite ∞ per $x \rightarrow \infty$

Se vuoi puoi dare un'occhiata alla [tabella riassuntiva](#) dei vari casi, altrimenti passa ai teoremi sui limiti

C'è ancora da dire che il concetto di limite mi permette di risolvere uno dei problemi più spinosi della matematica: [la divisione per zero](#)

a) Limite infinito per x tendente ad un valore finito

Quando x tende ad un valore finito la funzione può tendere a più infinito, a meno infinito o ad infinito in genere come abbiamo detto in fondo alla [nota](#)

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$

Limite tendente a più infinito per x tendente ad un valore finito

Per dire che abbiamo un limite più infinito quando x tende a c dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno di infinito sulla y sale verso l'alto l'intervallo che contiene il punto c si stringe.

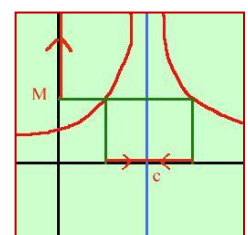
Definizione:

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite $+\infty$ per x tendente ad c e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$$

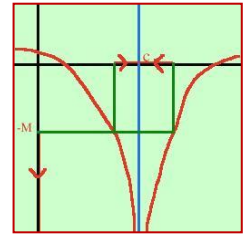
se esiste un numero positivo M grande a piacere tale che

da $f(x) > M$ segue $|x-c| < \epsilon_M$ (cioè minore di un numero piccolissimo dipendente da M)



Limite tendente a meno infinito per x tendente ad un valore finito

Per dire che abbiamo un limite meno infinito quando x tende a c dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno di meno infinito sulla y scende verso il basso l'intervallo che contiene il punto c si stringe.

**Definizione:**

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite $-\infty$ per x tendente ad c e si scrive:

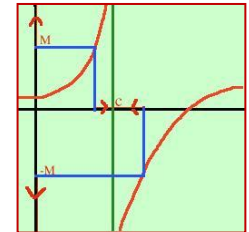
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

se esiste un numero positivo M grande a piacere tale che

da $f(x) < -M$ segua $|x-c| < \epsilon_M$ (cioè minore di un numero piccolissimo dipendente da M)

Limite tendente a infinito per x tendente ad un valore finito

Per dire che abbiamo un limite infinito quando x tende a c dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno di infinito sulla y sale verso l'alto e contemporaneamente scende verso il basso (in questo caso si dice che abbiamo un intorno completo di infinito) l'intervallo che contiene il punto c si stringe.

**Definizione:**

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite ∞ per x tendente ad c e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

se esiste un numero positivo M grande a piacere tale che

da $|f(x)| > M$ segua $|x-c| < \epsilon_M$ (cioè minore di un numero piccolissimo dipendente da M)

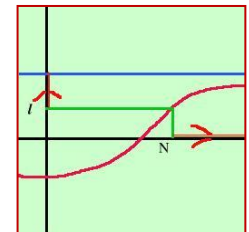
b) Limite finito per x tendente ad infinito

La x può tendere a più infinito, a meno infinito oppure genericamente ad infinito, quindi anche qui abbiamo tre casi possibili:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$

Limite finito l per x tendente a più infinito

Per dire che abbiamo un limite finito l quando x tende a più infinito dobbiamo dire che quando l'intorno di l sulle y si restringe il bordo del corrispondente intorno di infinito sull'asse x si allontana sempre più verso più infinito.

**Definizione:**

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite l per x tendente a $+\infty$ e si scrive:

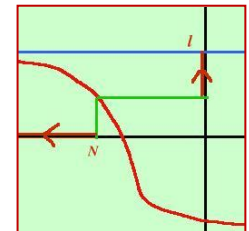
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

se esiste un numero positivo ϵ piccolo a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da ϵ tali che

da $|f(x) - l| < \epsilon$ segua $x > N$

Limite finito l per x tendente a meno infinito

Per dire che abbiamo un limite finito l quando x tende a meno infinito dobbiamo dire che quando l'intorno di l sulle y si restringe il bordo del corrispondente intorno di infinito sull'asse x si allontana sempre più verso meno infinito.

**Definizione:**

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite l per x tendente a $-\infty$ e si scrive:

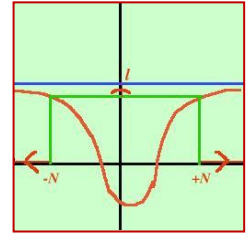
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

se esiste un numero positivo ϵ piccolo a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da ϵ tali che

da $|f(x) - l| < \epsilon$ segua $x < -N$

Limite finito l per x tendente a infinito

Per dire che abbiamo un limite finito l quando x tende a infinito dobbiamo dire che quando l'intorno di l sulle y si restringe i bordi del corrispondente intorno di infinito sull'asse x si allontanano sempre piu' uno verso piu' infinito e l'altro verso meno infinito.

**Definizione:**

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite l per x tendente a ∞ e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

se esiste un numero positivo ϵ piccolo a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da ϵ tali che

$$\text{da } |f(x) - l| < \epsilon \text{ segua } |x| > N$$

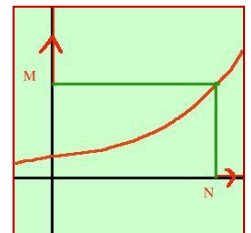
c) Limite infinito per x tendente ad un valore infinito

Qui abbiamo quattro casi con segni ben definiti piu' tre casi con infinito generico:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Limite piu' infinito per x tendente a piu' infinito

Per dire che abbiamo limite piu' infinito quando x tende a piu' infinito dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno di infinito sulle y si allontana verso l'alto (piu' infinito) allora anche il bordo del corrispondente intorno di infinito sull'asse x si allontana sempre piu' verso destra (piu' infinito).

**Definizione:**

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite $+\infty$ per x tendente a $+\infty$ e si scrive:

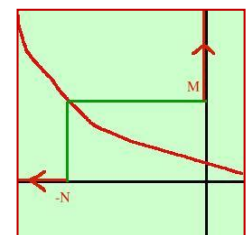
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

se esiste un numero positivo M grande a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da M tali che

$$\text{da } f(x) > M \text{ segua } x > N$$

Limite piu' infinito per x tendente a meno infinito

Per dire che abbiamo limite piu' infinito quando x tende a meno infinito dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno di infinito sulle y si allontana verso l'alto (piu' infinito) allora anche il bordo del corrispondente intorno di infinito sull'asse x si allontana sempre piu' verso sinistra (meno infinito).

**Definizione:**

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite $+\infty$ per x tendente a $-\infty$ e si scrive:

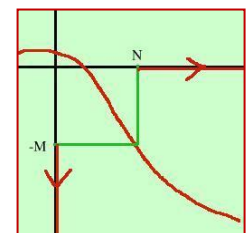
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

se esiste un numero positivo M grande a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da M tali che

$$\text{da } f(x) > M \text{ segua } x < -N$$

Limite meno infinito per x tendente a piu' infinito

Per dire che abbiamo limite meno infinito quando x tende a piu' infinito dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno di infinito sulle y si allontana verso il basso (meno infinito) allora anche il bordo del corrispondente intorno di infinito sull'asse x si allontana sempre piu' verso destra (piu' infinito).

**Definizione:**

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite $-\infty$ per x tendente a $+\infty$ e si scrive:

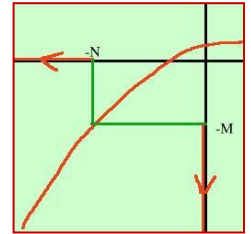
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

se esiste un numero positivo M grande a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da M tali che

$$\text{da } f(x) < -M \text{ segua } x > N$$

Limite meno infinito per x tendente a meno infinito

Per dire che abbiamo limite meno infinito quando x tende a meno infinito dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno di infinito sulle y si allontana verso il basso (meno infinito) allora anche il bordo del corrispondente intorno di infinito sull'asse x si allontana sempre piu' verso sinistra (meno infinito).



Definizione:

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite $-\infty$ per x tendente a $-\infty$ e si scrive:

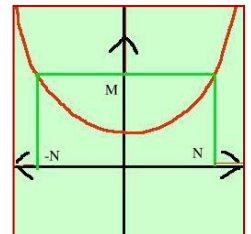
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

se esiste un numero positivo M grande a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da M tali che

$$\text{da } f(x) < -M \text{ segua } x < -N$$

Limite piu' infinito per x tendente ad infinito

Per dire che abbiamo limite piu' infinito quando x tende ad infinito dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno di infinito sulle y si allontana verso l'alto (piu' infinito) allora anche il bordo del corrispondente intorno completo di infinito sull'asse x si allontana contemporaneamente a destra ed a sinistra.



Definizione:

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite $+\infty$ per x tendente ad $+\infty$ e si scrive:

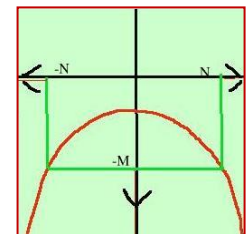
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

se esiste un numero positivo M grande a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da M tali che

$$\text{da } f(x) > M \text{ segua } |x| > N$$

Limite meno infinito per x tendente ad infinito

Per dire che abbiamo limite meno infinito quando x tende ad infinito dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno di infinito sulle y si allontana verso il basso (meno infinito) allora anche i bordi del corrispondente intorno completo di infinito sull'asse x si allontanano a destra ed a sinistra.



Definizione:

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite $-\infty$ per x tendente ad $+\infty$ e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

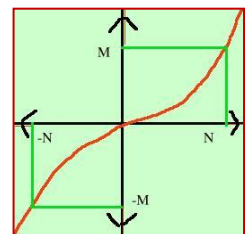
se esiste un numero positivo M grande a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da M tali che

$$\text{da } f(x) < -M \text{ segua } |x| > N$$

Limite infinito per x tendente ad infinito

Per dire che abbiamo limite infinito quando x tende ad infinito dobbiamo dire che quando il bordo dell'intorno completo di infinito sulle y si allontana verso il basso e verso l'alto allora anche il bordo del corrispondente intorno completo di infinito sull'asse x si allontana a destra ed a sinistra.

(Di solito non si considera e si preferisce spezzare nei due limiti destro e sinistro).



Definizione:

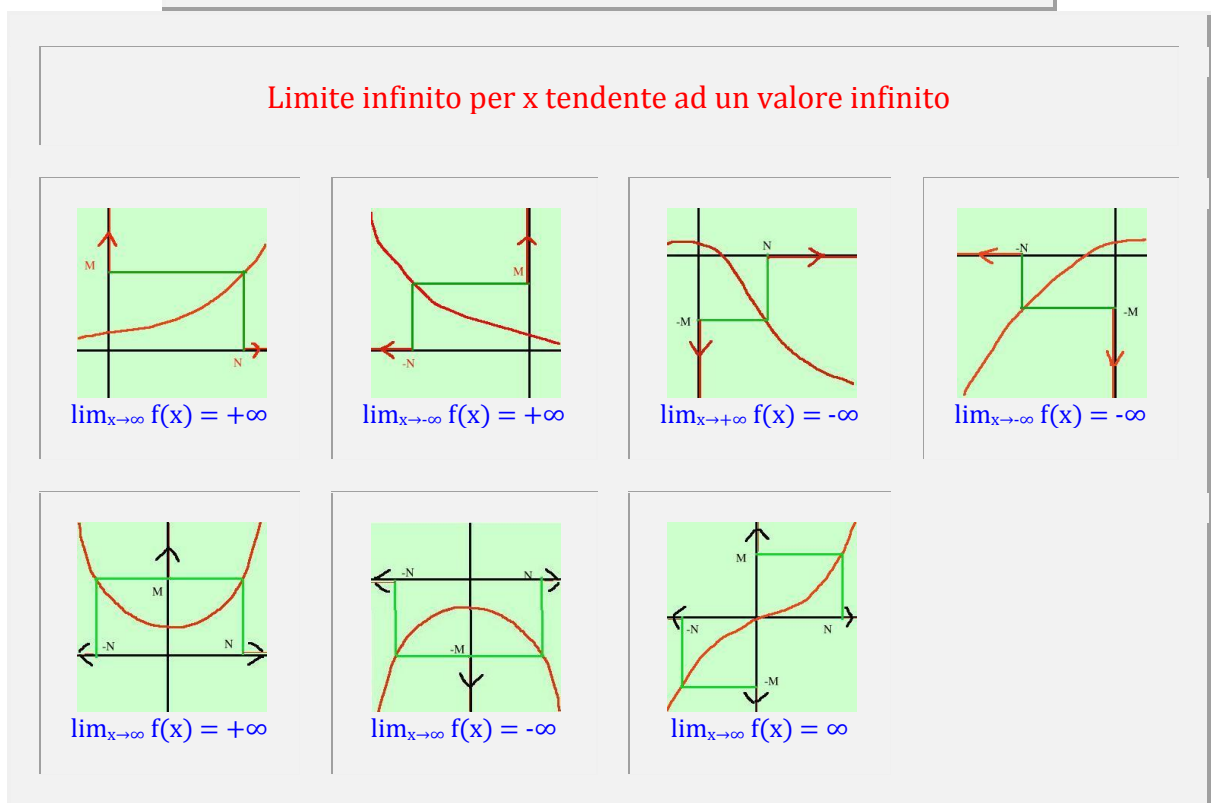
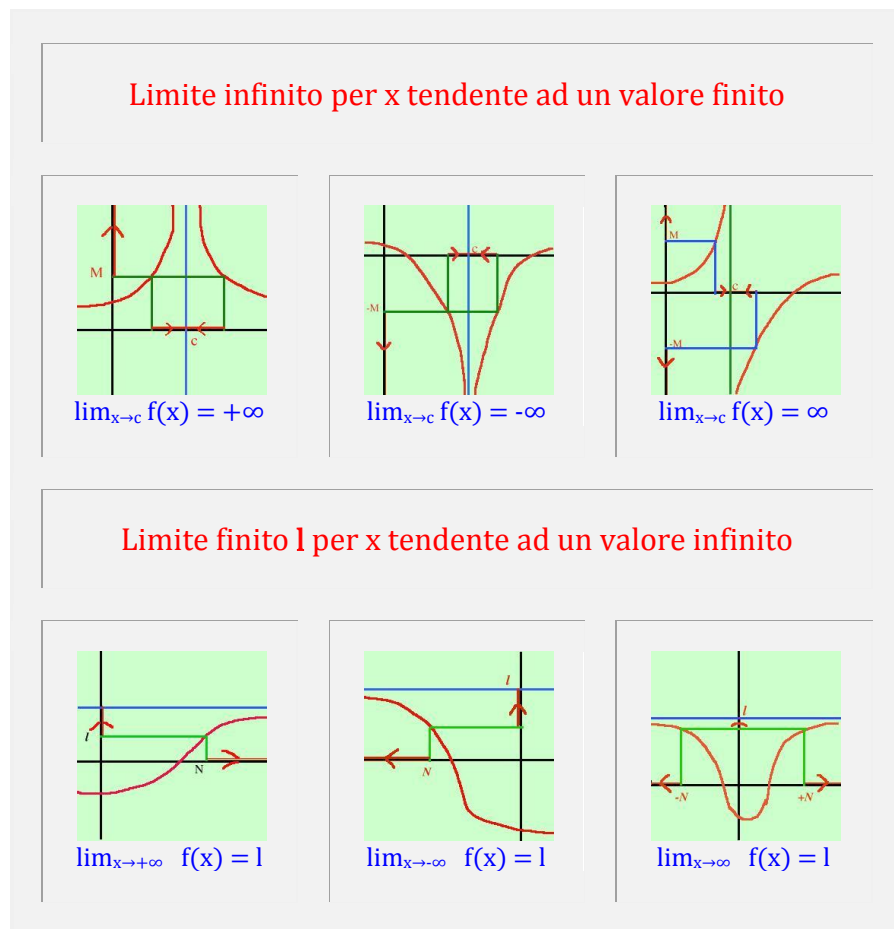
Si dice che la funzione $y = f(x)$ ammette limite ∞ per x tendente ad ∞ e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

se esiste un numero positivo M grande a piacere ed in sua corrispondenza un numero N grande in dipendenza da M tali che

$$\text{da } |f(x)| > M \text{ segua } |x| > N$$

d) Tabella riassuntiva per i vari casi



8. Teoremi sui limiti

Ora abbiamo un nuovo oggetto base per la matematica, il concetto di limite che sostituirà il concetto di punto, e' quindi necessario riscrivere tutta la matematica da questo punto di vista, ma per partire in modo adeguato dobbiamo fissare bene le proprietà dei limiti, cioè individuare dei teoremi che ci serviranno come base per ricostruire l'intera matematica dal nuovo punto di vista

I teoremi sui limiti serviranno a fissare le proprietà dei limiti stessi, ad essi affiancheremo le operazioni sui limiti che ci permetteranno di riportare le operazioni algebriche anche sul concetto di limite.

- Teorema dell'unicità del limite
- Teorema della permanenza del segno
- Teorema dei "carabinieri"
- Operazioni sui limiti

a) Teorema dell'unicità del limite

Non meravigliatevi del fatto che questi teoremi sembrino una cosa ovvia: e' dovuto al fatto che stiamo riscrivendo le regole di base.

Il teorema dell'unicità del limite dice che *il limite, quando esiste, e' unico*; cioè una funzione non può assumere al limite due valori diversi. (In pratica significa che stringendo l'intervallo l'intervallo stesso non si suddivide ma resta tutto unito anche quando diventa piccolissimo; cosa d'altra parte necessaria se vogliamo sostituire il concetto di intervallo al concetto di punto)

Per dimostrarlo basta ragionare per assurdo: supponiamo che non sia vero il risultato e mostriamo che non e' vero il teorema.

Se non fosse vero che abbiamo un solo valore ne avremmo due diversi, ma allora questi due valori sarebbero due punti ad una certa distanza, allora se prendiamo epsilon minore di quella distanza l'intervallo non potrà contenere entrambe i limiti e quindi non vale il concetto di limite.

In termini matematici sembra un po' piu' complicato, ma e' la stessa cosa.

Supponiamo esistano due limiti e dimostriamo che in tal caso non può esistere nessun limite.

I due limiti siano:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \quad \text{con } l_1 < l_2$$

Essendo i due limiti diversi la loro differenza in modulo sarà la distanza:

$$\text{distanza} = |l_1 - l_2|$$

Ora pongo:

$$\epsilon = |l_1 - l_2| / 2$$

cioè scelgo ϵ uguale alla metà della distanza ed il gioco e' fatto: ho creato una coperta troppo corta che non può coprire contemporaneamente i due limiti.

Ora e' impossibile avere contemporaneamente:

$$|f(x) - l_1| < \epsilon$$

$$|f(x) - l_2| < \epsilon$$

perche' l'intervallo ϵ non puo' coprire contemporaneamente l_1 ed l_2 in quanto la loro distanza e' maggiore di ϵ ed allora non puo' esistere il limite. Come volevamo dimostrare.

b) Teorema della permanenza del segno

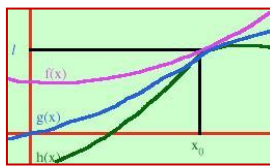
Il teorema dice che *se una funzione ha limite diverso da zero esiste tutto un intervallo ove la funzione ha lo stesso segno del suo limite.*

La dimostrazione e' molto simile a quella del teorema sull'unicita' del limite: bastera' fare una coperta abbastanza stretta che contenga il limite ma non lo zero.

Se il limite e' diverso da zero ci sara' una certa distanza fra il limite e lo zero, quindi se consideriamo ϵ uguale alla meta' di questa distanza l'intervallo che copre il limite non potra' raggiungere lo zero, pertanto in tutto questo intervallo il segno della funzione sara' uguale a quello del limite.

c) Teorema della maggiorante e della minorante, detto "dei carabinieri"

Il nome esatto sarebbe quello sopra, ma anche in alcuni testi scolastici ho visto chiamare questo teorema col secondo nome, che rende bene l' idea del teorema stesso.



Il teorema dice questo:

Se abbiamo tre funzioni, la prima maggiore delle altre due (maggiorante) e la terza minore delle altre due (minorante) allora se sia la prima che la terza funzione tendono ad un limite finito l allora anche la seconda deve tendere allo stesso limite.

Inutile dire che la prima e la terza funzione fanno da carabinieri e prendono in mezzo la seconda per portarla in prigione nel limite.

Dirlo in forma matematica e' un po' piu' laborioso.

Se abbiamo tre funzioni:

$$y = f(x) \quad y = g(x) \quad y = h(x)$$

tali che:

$$f(x) \geq g(x) \geq h(x)$$

se abbiamo inoltre che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

allora vale anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

Per un accenno di dimostrazione posso dire che prendendo un intorno completo che contenga l per $f(x)$ e prendendo un altro intorno completo che contenga l per $h(x)$ siccome $g(x)$ e' compresa fra le due funzioni bastera' considerare l'intervallo intersezione dei due intorni per avere un intorno completo di l per la funzione $g(x)$.

d) Operazioni sui limiti

Le operazioni sui limiti ci serviranno per il calcolo degli stessi.

(1) Limite di una somma di funzioni

In modo intuitivo possiamo dire che il limite di una somma e' uguale alla somma dei limiti: se ho due funzioni, la prima che tende a 5 e la seconda che tende a 7 per un certo valore di x allora la funzione somma mi tendera' a 12.

Se ad esempio devo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + e^x) =$$

Siccome:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

avro':

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + e^x) = 0 + 1 = 1$$

In forma matematica dobbiamo invece dire:

Se abbiamo due funzioni: $y = f(x)$ $y = g(x)$

tali che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$

allora si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$

A scuola (talvolta e non in tutte le scuole) si studia anche la dimostrazione ma ci si limita a questa prima operazione.

Intuitivamente prendero' come intervallo per la somma di funzioni la somma dei due intervalli nel modo seguente:

sapendo che (ipotesi)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

voglio dimostrare che ottengo (tesi) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$

So che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ equivale a $|f(x) - l| < \epsilon_1$

e che $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ equivale a $|g(x) - m| < \epsilon_2$

Devo dimostrare che con queste ipotesi ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + m \quad \text{che equivale a} \quad |f(x) + g(x) - l - m| < \epsilon_3$$

DIMOSTRAZIONE:

$$|f(x) + g(x) - l - m| = |(f(x) - l) + (g(x) - m)|$$

per le **proprietà dei moduli**

$$|(f(x) - l) + (g(x) - m)| < |f(x) - l| + |g(x) - m| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

Per la proprietà transitiva della disuguaglianza avremo:

$$|f(x) + g(x) - l - m| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

Bastera' ora prendere $\epsilon_3 > \epsilon_1 + \epsilon_2$ per ottenere la tesi.

(2) Limite di una differenza di funzioni

In modo intuitivo possiamo dire che il limite di una differenza di due funzioni e' uguale alla differenza dei limiti.

Se ad esempio devo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (e^x - \log x) =$$

siccome:

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \log x = 0$$

avro':

$$\lim_{x \rightarrow 1} (e^x - \log x) = e - 0 = e$$

In forma matematica dobbiamo dire:

Se abbiamo due funzioni:

$$y = f(x) \quad y = g(x)$$

tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

allora si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = l - m.$$

(3) Limite di un prodotto di funzioni

Il limite di un prodotto di funzioni e' uguale al prodotto dei limiti.

Se ad esempio devo fare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot e^x =$$

siccome:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

avro':

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot e^x = 1 \cdot 1 = 1$$

In forma matematica dobbiamo invece dire:

Se abbiamo due funzioni

$$y = f(x) \quad y = g(x)$$

tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

allora si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$$

Come caso particolare e' da tenere presente il prodotto di una costante per una funzione. Poiche' il limite di una funzione costante resta sempre lo stesso qualunque sia x, avremo che: se devo calcolare il limite del prodotto di una costante per una funzione bastera' moltiplicare la costante per il limite della funzione (si usa anche dire che possiamo estrarre le costanti dall'operazione di limite).

Esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 5 \cos x = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 5.$$

(4) Limite di un quoziente di funzioni

Anche qui possiamo dire che il limite di un quoziente di funzioni e' uguale al quoziente dei limiti, pero' a patto che al limite la funzione al denominatore abbia un valore diverso da zero.

Se ad esempio devo fare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x / \cos x =$$

siccome:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

avro':

$$\lim_{x \rightarrow 0} x/\cos x = 0/1 = 0$$

Se avessi avuto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x/x =$$

non avrei potuto applicare questo teorema perche' al limite il denominatore vale 0.

In forma matematica dobbiamo dire:

Se abbiamo due funzioni:

$$y = f(x) \quad y = g(x)$$

tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \quad \text{e} \quad m \neq 0$$

allora si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = l/m$$

Notare bene quel $m \neq 0$ nell'ipotesi.

9. Limiti notevoli

Sono molto importanti: il primo e' alla base del calcolo dei limiti su parecchie funzioni trigonometriche e l'altro e' il generatore del numero e (numero di Nepero)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x =$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x =$

a) Primo limite notevole: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$

Dobbiamo calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x =$$

e per fare questo utilizzeremo il teorema "dei carabinieri", cioe' prenderemo una funzione che sia sempre maggiore, una funzione che sia sempre minore e vedremo che entrambe le funzioni per x che tende a zero valgono 1 di conseguenza il nostro limite varra' 1.

Consideriamo questa disuguaglianza:

$$\sin x < x < \tan x$$

che, come si puo' vedere dalla figura e' valida essendo PQ ($\sin x$) minore dell'arco x che a sua volta e' minore di AT ($\tan x$); ora se divido tutto per $\sin x$ (e posso farlo senza cambiare niente perche' e' positivo) otterro':

$$\sin x/\sin x < x/\sin x < \tan x/\sin x$$

Semplificando:

$$1 < x/\sin x < 1/\cos x$$

Ora invertendo i termini basta cambiare di verso alle disuguaglianze:

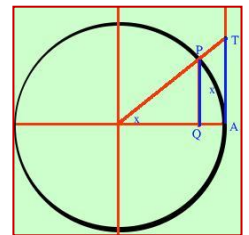
$$1 > (\sin x)/x > \cos x$$

Ora abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$



da cio' segue che anche per quella in mezzo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

b) Numero di Nepero; $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$

Numero di Nepero $e = 2,71828182845904523536\dots$

E' il valore del limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

e e' un numero importantissimo per la matematica.

Come base di un esponenziale e' invariante sia per l'operazione di derivazione che di integrazione, puo' essere utilizzato per rappresentare i numeri complessi, e' la base dei cosiddetti logaritmi naturali o Neperiani.

Alle superiori non ho visto farne la dimostrazione in nessun istituto scolastico, cosa invece che si fa talvolta (ma non sempre) all'universita'.

10. Forme indeterminate

Mediante il concetto di limite e' possibile dare un senso matematico a limiti quali:

$$1/0 = \infty$$

$$1/\infty = 0$$

$$\infty/0 = \infty$$

$$0/\infty = 0$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

Tuttavia vi sono ancora alcune forme cui non possiamo assegnare un valore: le cosiddette forme indeterminate:

Esse vanno trattate caso per caso

Forme indeterminate:

- $0/0$
- ∞/∞
- $0 \cdot \infty$
- $\infty - \infty$
- $0^\infty, 1^\infty$ e ∞^0

a) Limite in forma indeterminata tipo $0/0$

Avvertenza:

Purtroppo il Web non e' predisposto per scrivere le frazioni, allora, poiche' non voglio far pesare troppo queste pagine costruendo le frazioni mediante immagini e poiche' l'utilizzo di fogli di stile sarebbe per me piuttosto gravoso premetto che per le frazioni useremo la seguente convenzione:

invece di scrivere:

$$y = \frac{x^2-4}{x-2}$$

scrivero':

$$y = (x^2-4) / (x-2)$$

Torniamo ora alla forma indeterminata: e' possibile che il limite, che abbiamo da poco definito, sia cosi' inefficiente da non poter calcolare una cosa di questo genere?

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) / (x - 2) =$$

Infatti se faccio i calcoli sostituendo 2 ad x ottengo 0/0 che **in matematica non ha significato**. Ma se la definizione di limite che abbiamo data e' valida l'errore non deve essere nel limite, ma nella funzione: infatti avremo il limite 0/0 solo se la funzione si annulla contemporaneamente al numeratore ed al denominatore, allora per calcolare il limite bastera' togliere nella funzione la causa dell'indeterminazione scomponendo numeratore e denominatore e semplificando:

$$x^2 - 4 \text{ si scompone come } (x + 2)(x - 2)$$

Il denominatore e' gia' scomposto $(x - 2)$

Semplifico:

$$(x^2 - 4) / (x - 2) = (x + 2)(x - 2) / (x - 2) = x + 2$$

e faccio il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Attenzione: per poter fare bene questi esercizi e' necessario saper fare bene la **scomposizione di un polinomio in fattori** e un ripasso non farebbe male; comunque, piu' avanti vedremo come e' possibile **utilizzare le derivate** per poter calcolare in modo molto semplice queste forme

Proviamo un altro esercizio: calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) / (x^3 - 1) =$$

anche qui sostituendo 1 alla x ottengo 0/0 quindi devo scomporre il numeratore ed il denominatore e togliere la causa dell'indeterminazione.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \text{ e' il cubo di un binomio e si scompone come } (x - 1)^3$$

$$x^3 - 1 \text{ e' la differenza fra due cubi e si scompone come } (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Semplificando ottengo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) / (x^3 - 1) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^3 / (x - 1)(x^2 + x + 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 / (x^2 + x + 1) = 0/3 = 0. \end{aligned}$$

b) Forme indeterminate del tipo ∞/∞

Intanto bisogna dire che queste forme indeterminate si hanno generalmente quando facciamo il limite per x tendente ad ∞ cioe'

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = \infty/\infty$$

Possiamo pero' averle anche per x tendente ad un valore finito, esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Possono essere trattate in due modi diversi:

- con il metodo polinomiale
- con l'ordine degli infiniti

Forme indeterminate del tipo ∞/∞ metodo polinomiale

Proviamo subito su un esempio:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 4x - 4) / (5x^2 + 6x - 3)$$

Metto in evidenza x^2 al numeratore ed al denominatore.

Al numeratore ottengo:

$$x^2(3 + 4/x - 4/x^2)$$

Al denominatore ottengo:

$$x^2(5 + 6/x - 3/x^2)$$

Quindi se ora faccio:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(3 + 4/x - 4/x^2) / x^2(5 + 6/x - 3/x^2)$$

Posso semplificare sopra e sotto x^2 ed ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 4/x - 4/x^2) / (5 + 6/x - 3/x^2)$$

e sapendo che il limite di un numero fratto x per x tendente ad infinito vale zero (anche quello di un numero fratto x^2 , x^3 , x^4 ...) ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 4/x - 4/x^2) / (5 + 6/x - 3/x^2) = (3 + 0 - 0) / (5 + 0 - 0) = 3/5$$

Forme indeterminate del tipo ∞/∞ metodo del confronto fra infiniti

Posso rendere molto piu' semplice il calcolo della pagina precedente con il seguente ragionamento:

se un numero tende ad infinito, tendera' ad infinito prima x^2 rispetto ad x (prova a mettere al posto di x un numero grande, il suo quadrato sara' ancora piu' grande) cioe' intuitivamente quando x^2 e' gia' infinito ancora x e' un valore inferiore quindi trascurabile, quindi in questi limiti basta considerare solo la x a potenza piu' grande; allora:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 4x - 4) / (5x^2 + 6x - 3)$$

Sara' uguale al limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 / 5x^2 =$$

Semplifico:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3/5 = 3/5$$

Da notare che posso fare una "graduatoria" di infiniti rispetto all'infinito "campione"

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x$$

Quelli con potenza della x superiore ad 1 andranno all'infinito piu' rapidamente mentre quelli con potenza di x inferiore ad 1 andranno ad infinito piu' lentamente, ad esempio per x tendente ad ∞ x^3 arrivera' all'infinito piu' rapidamente di $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

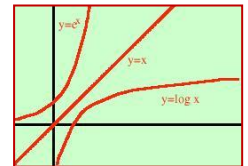
Inoltre posso dire che in assoluto la funzione che andra' all' ∞ piu' rapidamente di tutte le altre sara':

$$y = e^x$$

mentre la piu' lenta ad andare all'infinito sara':

$$y = \log x$$

ove con $\log x$ si intende il logaritmo naturale (quello in base e per intenderci)



Quanto detto mi permette di classificare i limiti del tipo ∞/∞ in tre grandi gruppi:

Definiamo ordine di infinito di una espressione come quello del suo termine di grado piu' alto.

Esempio. L'ordine di infinito di:

$$7x^4 - 5x^3 + 2x + 4 \log x$$

vale a 4 perche' 4 e' l'ordine di infinito piu' alto fra i suoi termini.

- Se il numeratore ha lo stesso ordine di infinito del denominatore, allora il limite e' uguale al rapporto fra i due termini di grado piu' alto. Nel seguente esempio l'ordine di infinito del numeratore e del denominatore sono entrambe uguali ad 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 2 \log x) / 4x = 3/4$$

- se il numeratore ha ordine di infinito superiore al denominatore allora il limite vale ∞ ; esempio:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x / x^3 = \infty$$

- se il numeratore ha ordine di infinito inferiore al denominatore, allora il limite vale 0; esempio:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + \log x) / e^x = 0$$

Come abbiamo fatto una classifica degli infiniti possiamo fare la stessa classifica per gli infinitesimi rispetto all'infinitesimo campione:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$$

Quelli con potenza della frazione superiore: $1/x^2$, $1/x^3$, $1/x^4$, andranno a zero piu' velocemente; d'altra parte basta ricordare che $1/0 = \infty$ e che $1/\infty = 0$.

c) Limiti in forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$

Per risolverli basta ricordare che $1/0 = \infty$ e quindi trasformare in modo da tornare al caso precedente; esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x / (1/x) = \infty / \infty$$

ed essendo il logaritmo la funzione piu' lenta nell'andare all'infinito avremo che quando il numeratore e' ancora un numero il denominatore e' gia' infinito quindi il limite vale zero.

d) Forme indeterminate del tipo $\infty - \infty$

Di solito sono forme che si hanno quando si ha qualche radicale; in ogni caso per risolverle basta ricordarsi dei metodi di **razionalizzazione** e moltiplicare per la stessa forma col segno in mezzo cambiato sia al numeratore che al denominatore (ricorda che al denominatore se non c'e' niente c'e' sempre 1); allora il limite diventa della forma ∞ / ∞ e posso applicare i metodi gia' visti.

Esempio:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x}) &= \infty - \infty = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x}) / (x + \sqrt{x}) = \end{aligned}$$

Eseguiamo la moltiplicazione:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) / (x + \sqrt{x}) =$$

E' ora una frazione del tipo ∞ / ∞ e applicando la regola degli ordini di infinito il numeratore ha ordine 2 ed il denominatore 1 quindi :

$$= \infty$$

e) Forme indeterminate del tipo $0^\infty, 1^\infty, \infty^0$

E' piuttosto raro che capiti di calcolare forme di questo genere (ho visto farlo solo in un liceo scientifico), pero' per risolverle basta ricordare che il logaritmo e' funzione inversa dell'esponenziale e che valgono le seguenti uguaglianze (indico con $\log x$ il logaritmo naturale di x):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow c} e^{\log f(x) g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow c} e^{g(x) \cdot \log f(x)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow c} g(x) \cdot \log f(x)} \end{aligned}$$

ed all'esponente avro' una delle forme gia' viste.

Esempio: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2)^{1/x} = \infty^0$

Applichiamo la regola vista prima:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\log x^2) 1/x} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x \cdot \log x^2} &= \\ e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x \cdot \log x^2} &= \\ e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \log x) / x} &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

Con le uguaglianze scritte sopra possiamo anche (quasi) provare un' affermazione fatta sulle potenze: cioe' che qualunque numero elevato a zero vale 1, e quindi anche $0^0 = 1$ (e non e' una forma indeterminata).

Provate a calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0^0$$

Applicando la regola:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\log x^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \log x} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \log x} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (\log x) / (1/x)} = e^0 = 1$$

Il problema è che il logaritmo è definito solamente quando l'argomento è maggiore di zero, quindi il limite precedente effettivamente è un limite destro, mentre non posso fare il limite sinistro; inoltre la funzione x^x è definita solo per valori positivi delle x perché non possiamo considerare potenze con base negativa in quanto non hanno significato. Per questo ho messo quel quasi.

C. Funzioni continue

Il concetto di continuità è fondamentale e l'insieme delle funzioni continue ha molte interessanti (si fa per dire) proprietà.

Osservazione importante!

Attenzione: per poter parlare di continuità o discontinuità bisogna poter parlare di limite; ad esempio secondo voi la funzione:

1 se x è razionale

$y =$

-1 se x è reale non razionale

che tipo di discontinuità ha?

Nessuno; infatti non può ammettere limite in nessuno dei suoi punti: l'intervallo sulle y non si stringe.

	1
	-1

- Definizione di funzione continua
- Funzioni non continue

4. Definizione di funzione continua

Intuitivamente possiamo dire che una funzione si dice continua quando possiamo disegnarla senza staccare la penna dal foglio (o il gessetto dalla lavagna), ma penso sia il caso di darle una definizione matematica precisa utilizzando il concetto di limite:

Una funzione si dice continua in un punto quando in quel punto coincide con il suo limite.

Una funzione si dice continua in un intervallo quando è continua in ogni punto dell'intervallo.

In linguaggio matematico

$y = f(x)$ è continua nel punto c se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

e

$y = f(x)$ è continua in un intervallo se per ogni punto c dell'intervallo vale

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Il "per ogni" mi trasforma la continuità in un punto nella continuità per ogni punto cioè in tutti i punti dell'intervallo.

Si puo' anche usare la seguente definizione:

Una funzione e' continua in un punto c se in quel punto esistono il suo limite destro e sinistro ed i due limiti sono finiti ed uguali

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = k \quad \text{con } k = f(c)$$

Deriva dal fatto che il limite esiste se esistono finiti il limite destro e sinistro ed entrambe coincidono.

5. Funzioni discontinue

Diciamo semplicemente che:

Una funzione si dice discontinua quando non e' continua

Possiamo raggruppare le discontinuita' in tre gruppi:

- Discontinuita' di prima specie
- Discontinuita' di seconda specie
- Discontinuita' di terza specie

a) Discontinuita' di prima specie

Una discontinuita' si dice di prima specie se esistono finiti i limiti destro e sinistro ma i due limiti sono diversi.

Esempio: consideriamo la funzione cosi' definita:

$$y = \begin{cases} x & \text{per } x < 0 \\ x + 2 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

Essa presenta una discontinuita' di prima specie nel punto zero; infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2$$

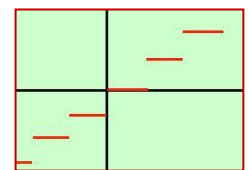


Attenzione! Non e' detto che una funzione debba avere una formula matematica fissa per tutto l'asse reale, io posso definire anche una funzione a pezzi come nell'esempio sopra: l'importante e' che per ogni valore della x corrisponda un solo valore della y .

Un esempio classico di funzione con infiniti punti di discontinuita' di prima specie e' la funzione "scala":

$$y = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ e' un intero} \\ \text{int}(x) & \text{se } x \text{ non e' intero} \end{cases}$$

intendendo con $\text{int}(x)$ la parte intera del numero x , cioe' il numero x scritto senza decimali.



b) Discontinuita' di seconda specie

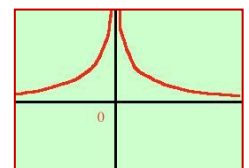
Una discontinuita' e' di seconda specie se la funzione in un punto vale infinito. Ricordiamoci che infinito non e' un punto ben preciso ma una convenzione e quindi quando la funzione vale infinito non e' definita.

Esempio di discontinuita' di seconda specie:

La funzione:

$$y = 1/x^2$$

presenta una discontinuita' di seconda specie nel punto 0.



c) Discontinuita' di terza specie (o eliminabile)

E' il caso in cui la funzione in un punto:

a) *non esiste*

oppure

b) *esiste ma risulta di valore diverso dal limite.*

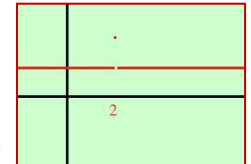
E' comunque possibile eliminare tale discontinuita' attribuendo alla funzione in quel punto il valore del suo limite.

a) Caso in cui la funzione non esiste e' gia' **stato visto** nelle forme indeterminate.

Ad esempio la funzione:

$$y = (x^2-4) / (x-2)$$

non esiste nel punto 2 ed il suo limite in tale punto vale 4; attribuendo 4 al valore della funzione in quel punto la discontinuita' e' eliminata.



b) Caso in cui la funzione ha valore diverso dal suo limite.

L'esempio classico di questa discontinuita' e' la funzione impulso:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{per } x \neq 2 \\ 2 & \text{per } x = 2 \end{cases}$$

Bastera' assegnare alla funzione il valore 1 anche nel punto 2 per eliminare la discontinuita'

Simile a questa ma piu' famosa e' la funzione in due variabili delta di Kroneker cosi' definita:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

D. *Derivate*

Arriviamo ora ad uno dei concetti piu' importanti dell'analisi, il concetto di derivata di una funzione

Avvertenze: il simbolo di derivata puo' essere espresso in vari modi, : dy/dx , $df(x)/dx$, y' , $f'(x)$ simboli diversi derivanti dalla polemica fra Newton e Leibnitz sulla priorita' della scoperta del calcolo infinitesimale; noi useremo in prevalenza y' e $f'(x)$.

4. **Perche' la derivata**

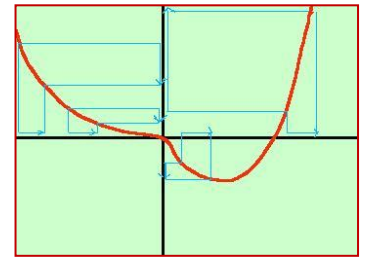
Il concetto di limite, sebbene utilissimo per sostituire ad un punto un intervallo ha comunque dei difetti: infatti applicando il concetto di limite ad un punto io posso avere solamente una visione locale di una funzione; e' come se volessi studiare una strada di notte approfittando della luce di qualche lampione; potro' vedere in quel punto e nelle vicinanze di quel punto ma se voglio sapere cosa succede un po' piu' in la' dovrò avere un altro lampione.

A noi serve qualcosa che ci permetta di vedere la funzione nella sua interezza e quel qualcosa sara' la derivata.

Immaginate di avere una funzione ed un punto sull'asse delle x cui corrisponde un punto sull'asse y; se pensiamo che il punto sull'asse x si sposti con regolarita' cosa vedro' sull'asse y?

Vedro' che il punto sull'asse y va piu' veloce o meno veloce a seconda della pendenza della funzione.

Se osservi la figura a fianco vedi che a frecce uguali sull'asse x corrispondono frecce diverse sull'asse y e questo e' dovuto alla velocita' con cui si aggregano i punti sulla y rispetto ai punti sulla x.



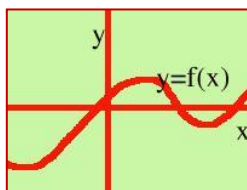
Prima la funzione (il punto sull'asse y corrispondente alla x) scende rapidamente poi man mano rallenta di velocita' fino a fermarsi dove c'e' il minimo e quindi cambia direzione e prende velocita' salendo verso l'alto.

Se ora noi riusciamo ad esprimere come varia di velocita' il punto sulla y al variare di x in modo regolare, avremo un qualcosa che ci permettera' di vedere la funzione tutta intera e non solo una piccola parte come nel caso del limite.

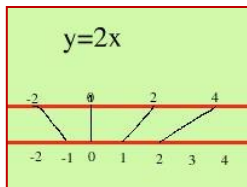
Ora si tratta di esprimere matematicamente questo concetto:

Come varia il punto sull'asse y quando il punto sull'asse x si sposta regolarmente?

Se non ti e' troppo chiaro forse puo' aiutarti guardare questa [nota sulla rappresentazione di una funzione](#).

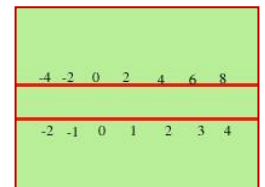


E' utile ricordare, per ben capire il concetto di funzione, che la funzione e' il collegamento esistente fra due variabili, e si puo' rappresentare, per funzioni reali di variabili reali, mediante il collegamento esistente fra due rette; ora queste rette di solito si rappresentano mediante un sistema di assi ortogonali e la funzione diventa l'insieme dei punti che ad una x fanno corrispondere una y;



Io, personalmente, trovo un po' riduttiva questa idea di funzione e talvolta ad alcune classi particolarmente brave l'ho spiegata in modo (quasi) equivalente come segue:

pensate due rette fra loro parallele, immaginiamo una freccia che ad ogni punto della prima retta mi faccia corrispondere un punto sulla seconda, ed ora immaginiamo di spostare i punti sulla seconda retta (come se fosse di gomma) in modo che ad ogni punto della prima retta stia di fronte il punto corrispondente sulla seconda, in tal caso



la funzione sarebbe come vengono "addensati" i punti sulla seconda retta al variare della x sulla prima retta; bene, mi dira' qualcuno, ma a cosa serve questo ragionamento?

Serve a capire che la funzione e' qualcosa di piu' della sua rappresentazione cartesiana: la funzione e' un fenomeno (in senso filosofico) che coinvolge i punti dell'asse delle y (in parole povere e' come si addensano i punti sull'asse delle y) e la curva nel piano cartesiano ne e' solamente una rappresentazione grafica.

5. Definizione di derivata

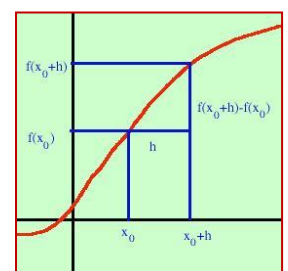
Dobbiamo vedere come varia la y quando la x varia in modo regolare. Intuitivamente il sistema piu' semplice e' quello di considerare un intervallo sulla y ed il corrispondente intervallo sulle x e farne il rapporto; questo mi dara' la variazione media. Se voglio la variazione in un punto dovro' restringere gli intervalli fino a quel punto.

Matematicamente:

considero sull'asse x i punti x_0 e x_0+h ,

in loro corrispondenza avro' i punti $f(x_0)$ ed $f(x_0+h)$ sull'asse y.

La distanza tra $f(x_0)$ ed $f(x_0+h)$ sull'asse y (in verticale) sara':



$$f(x_0+h) - f(x_0)$$

mentre la distanza tra x_0+h ed x_0 sull'asse x sarà:

$$x_0+h - x_0 = h$$

Chiamiamo **rapporto incrementale** il rapporto tra la distanza sull'asse y e la distanza sull'asse x:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{rapporto incrementale}$$

Ora per ottenere la derivata nel punto x_0 basterà far stringere l'intervallo facendo diminuire h :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

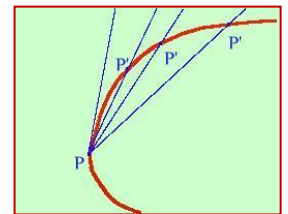
Definizione: si definisce derivata di una funzione in un punto il limite (se esiste ed è finito) del rapporto incrementale al tendere a zero dell' incremento h .

Per avere la derivata generica basterà considerare il punto come x , cioè non fisso ma generico sull'asse delle x .

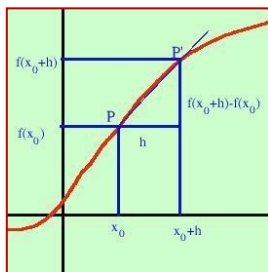
6. Significato geometrico della derivata

Per capire il significato geometrico della derivata bisogna saper bene come trovare la tangente ad una curva in un suo punto.

Preso una curva ne fissiamo un punto P e quindi un altro punto P' diverso da P e tracciamo la retta PP' ora basta far scivolare P' sulla curva verso P e quando P' sarà coincidente con P avremo la retta tangente alla curva in P (Ho tracciato delle semirette invece che rette per rendere più semplice la figura).



Definizione: si definisce tangente ad una curva in un punto la posizione limite della retta sottesa da una corda al tendere del secondo punto della corda sul primo



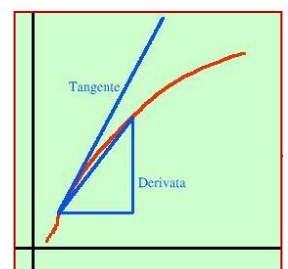
Ora se riprendiamo la definizione di derivata, vedi che quando h tende a zero il secondo punto sulla curva si sposta verso il primo punto fino a coincidere.

Inoltre il rapporto incrementale è uguale al coefficiente angolare della retta che congiunge i due punti sulla curva.

Quindi, al limite, la derivata ed il coefficiente angolare della retta tangente alla curva devono coincidere cioè:

Definizione: la derivata di una funzione in un punto è uguale al coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto.

Veramente qui occorre fare una piccola precisazione: la tangente è sempre da una parte della curva mentre la derivata si trova su una



corda della curva stessa: cioè la derivata e il coefficiente angolare della tangente differiscono per qualcosa, ma qualcosa di talmente piccolo (un infinitesimo) da non influenzare i calcoli; comunque torneremo sull'argomento parlando del concetto di **differenziale**.

7. Applicazioni

Visto che la derivata, per come è costruita mi dà la velocità con cui varia la y al variare della x , sarà possibile utilizzare le derivate in tutti quei fenomeni ove ci interessa avere la velocità di variazione del fenomeno stesso.

Ad esempio, potremo calcolare la variazione dello spazio rispetto al tempo, cioè la velocità, oppure la variazione della velocità rispetto al tempo, cioè l'accelerazione, oppure la velocità di una reazione chimica o il flusso di una corrente elettrica eccetera

Comunque ora dobbiamo cercare di capire come funziona questo nuovo **giocattolo** per poterlo poi utilizzare al meglio: vediamone quindi alcune proprietà.

Immagino tu non sia troppo d'accordo a chiamarlo giocattolo, forse secondo te era più indicato chiamarlo marchingegno o diavoleria

Rilassati: la matematica non è solo fatica ma è anche divertente (se presa a piccole dosi): prova ad esempio a leggere qualcuno dei volumi di Martin Gardner dal titolo "Enigmi e giochi matematici" e vi troverai una miniera di fatti divertenti e stimolanti.

a) Esempi di calcolo di qualche semplice derivata

Per iniziare proviamo a calcolare la derivata di $y = x^2$:

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+h) = (x+h)^2$$

Faccio il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

Sviluppo il quadrato:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2hx + h^2) / h =$$

Per il teorema sulla somma dei limiti:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2hx / h + \lim_{h \rightarrow 0} h^2 / h =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + \lim_{h \rightarrow 0} h = 2x$$

Quindi la derivata di $y = x^2$ è $y' = 2x$

Calcoliamo ora la derivata di $y = \sin x$:

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x+h) = \sin(x+h)$$

Faccio il limite del rapporto incrementale:

$$\sin(x+h) - \sin x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

Applico la regola della somma per $\sin(x+h)$

$$\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

Per il teorema sulla somma dei limiti:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin x \cos h - \sin x) / h + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \sin h / h =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x (\cos h - 1) / h + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot (\sin h / h) =$$

$$= (\sin x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (\cos h - 1) / h + (\cos x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin h / h =$$

$$= (\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Calcolo del limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\cos h - 1) / h =$$

moltiplico sopra e sotto per $(\cos h + 1)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (\cos h - 1) \cdot (\cos h + 1) / h \cdot (\cos h + 1) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (\cos^2 h - 1) / h \cdot (\cos h + 1) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin^2 h / h \cdot (\cos h + 1) =$$

ora posso suddividere l'argomento del limite in tre parti:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -(\sin h / h) \cdot (\sin h) \cdot [1 / (\cos h + 1)] =$$

$$= -1 \cdot 0 \cdot 1/2 = 0$$

Quindi la derivata di $y = \sin x$ e' $y' = \cos x$

Avrai notato che e' piuttosto difficile calcolare le derivate in questo modo: allora e' preferibile utilizzare una tabella da cui ricavare alcune derivate fondamentali cui fare riferimento.

b) Tabella riassuntiva delle principali derivate

<i>Funzione</i>	<i>Derivata</i>
$y = \text{costante}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n x^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = 1 / 2\sqrt{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = 1/\cos^2 x$ oppure $y' = 1 + \tan^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -1/\sin^2 x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \log a$
$y = \log x$	$y' = 1/x$
$y = \log_a x$	$y' = 1 / (x \log a) = (\log_a e) / x$
$y = \arcsin x$	$y' = 1 / \sqrt{1 - x^2}$
$y = \arccos x$	$y' = -1 / \sqrt{1 - x^2}$
$y = \arctan x$	$y' = 1 / (1 + x^2)$
$y = \text{arccot} x$	$y' = -1 / (1 + x^2)$

c) Semplici esercizi di applicazione della tabella

Purtroppo gli esercizi che ora possiamo fare sono davvero pochi in quanto ancora non abbiamo le regole operative; comunque cominciamo con quelli che possiamo fare:

Calcoliamo la derivata di:

$$y = 1/x^4$$

Basta ricordare che per le regole sulle potenze si ha:

$$1/x^4 = x^{-4}$$

e quindi applicando la regola:

$$y' = (-4)x^{(-4-1)}$$

$$y' = -4x^{-5}$$

cioè (ricordando che devi mettere il risultato nella stessa forma da cui sei partito):

$$y' = -4/x^5$$

Proviamo ora a calcolare la derivata di:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Per le regole sulle potenze si ha:

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

e quindi applicando la regola:

$$y' = (1/3)x^{(1/3-1)}$$

$$y' = (1/3)x^{(-2/3)}$$

Cambio di segno l'esponente e porto x al denominatore:

$$y' = 1 / (3 x^{2/3})$$

$$y' = 1 / (3 \sqrt[3]{x^2})$$

le parentesi negli ultimi risultati servono solo a mostrare che tutto il termine è sotto il segno di frazione; scrivendo normalmente la frazione puoi omettere le parentesi

Calcoliamo la derivata di:

$$y = \sqrt[5]{x^3}$$

Per le regole sulle potenze si ha:

$$\sqrt[5]{x^3} = x^{3/5}$$

e quindi applicando la regola:

$$y' = (3/5)x^{(3/5-1)}$$

$$y' = 3 / (5 x^{2/5})$$

$$y' = 3 / (5 \sqrt[5]{x^2})$$

Calcolare:

$$y = 1 / (4\sqrt{x^3})$$

Per le regole sulle potenze si ha:

$$1 / (4\sqrt{x^3}) = 1 / (x^{3/4}) = x^{-3/4}$$

e quindi applicando la regola:

$$y' = (-3/4)x^{(-3/4-1)}$$

$$y' = -3 / (4 x^{7/4})$$

$$y' = -3 / (4 \sqrt[4]{x^7})$$

Posso estrarre da radice:

$$y' = -3 / (4x \sqrt[4]{x^3})$$

Proviamo ora per finire:

$$y = (\sqrt[4]{x^3}) / (\sqrt[3]{x^2})$$

Per le regole sulle potenze si ha:

$$\begin{aligned} (\sqrt[4]{x^3}) / (\sqrt[3]{x^2}) &= (x^{3/4}) / (x^{2/3}) = \\ &= x^{3/4} \cdot x^{-2/3} = x^{(3/4 - 2/3)} = x^{1/12} \end{aligned}$$

quindi applicando la regola:

$$y' = (1/12) x^{(1/12 - 1)}$$

$$y' = (1/12) x^{-11/12}$$

$$y' = 1 / (12 \sqrt[12]{x^{11}})$$

d) Operazioni sulle derivate

Vediamo ora alcune regole da sapere per poter eseguire la derivata di una funzione; sono fondamentali e bisogna saperle molto bene.

(1) Derivata di una somma o differenza di funzioni

E' la regola piu' facile ed intuitiva.

Per fare la derivata di una somma (o differenza) di funzioni basta fare la derivata delle singole funzioni ed il segno non cambia:

Esempio:

Facciamo la derivata di:

$$y = x^4 + x^3 - x^2 - x$$

La derivata di x^4 e' $4x^3$

La derivata di x^3 e' $3x^2$

La derivata di x^2 e' $2x$

La derivata di x e' 1

quindi:

$$y' = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$

(2) Derivata di un prodotto di funzioni

Qui cominciamo ad andare sul complicato.

Se ho il prodotto di due funzioni e ne voglio la derivata devo fare:

la derivata della prima per la seconda non derivata piu' la prima tale e quale per la derivata della seconda.

In simboli se:

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

Allora:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Esempio:

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = x^3 \sin x$$

La derivata di x^3 e' $3x^2$

La derivata di $\sin x$ e' $\cos x$

quindi

$$Y' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$$

Conseguenza importante: se devo fare la derivata di una costante per una funzione bastera' moltiplicare la costante per la derivata della funzione **Dimostrazione:**

Infatti chiamando c la costante avremo:

$$y = c \cdot f$$

$$y' = c' \cdot f + c \cdot f'$$

ed essendo la derivata di una costante c' uguale a zero sara'

$$y' = c \cdot f'$$

cioe' posso estrarre le costanti dal segno di derivata.

cioe' posso estrarre le costanti dal segno di derivata.

Esempio:

$$y = 3x^4$$

Essendo 3 una costante la moltiplico per la derivata di x^4

$$y' = 3 \cdot 4 x^3$$

$$y' = 12 x^3$$

Se hai bisogno della dimostrazione della regola della derivata di un prodotto, eccola:

Voglio dimostrare che se ho:

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

allora ne segue:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Parto dal rapporto incrementale per la funzione $y = f(x) \cdot g(x)$

Il rapporto incrementale vale:

$$f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{-----}}{h} =$$

Pero' io so fare la derivata solo quando il rapporto incrementale mi coinvolge una sola funzione, quindi aggiungo e tolgo un termine in modo da spezzare quel rapporto incrementale in due rapporti incrementali: (se aggiungo e contemporaneamente tolgo la stessa quantita' l'espressione non mi cambia di valore)

$$f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{-----}}{h} =$$

Ora spezzo il limite in due limiti:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

Per problemi di visualizzazione sullo schermo facciamo un limite per volta:

nel primo limite

$$f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{-----}}{h} =$$

Posso mettere in evidenza $g(x+h)$ ed ottengo il limite di un prodotto:

$$f(x+h) - f(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \frac{\text{-----}}{h} =$$

e posso fare il prodotto dei limiti:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

Il primo limite quando h tende a zero vale $g(x)$ ed il secondo e' $f'(x)$ quindi :
 $= g(x) \cdot f'(x) = f'(x) \cdot g(x)$

Nel secondo limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

posso mettere in evidenza $f(x)$ ed ottengo il limite di un prodotto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

e posso fare il prodotto dei limiti:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

Il primo limite non dipende da h e vale $f(x)$ ed il secondo e' $g'(x)$ quindi:
 $= f(x) \cdot g'(x)$

Raccogliendo i risultati l'espressione iniziale vale:

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Come volevamo.

Esercizi:

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = \sin x \cos x$$

La derivata di $\sin x$ e' $\cos x$

La derivata di $\cos x$ e' $-\sin x$

quindi:

$$y' = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)$$

cioe'

$$y' = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = e^x \sin x$$

La derivata di e^x e' e^x

La derivata di $\sin x$ e' $\cos x$

quindi:

$$y' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = 5e^x \log x$$

5 e' una costante e la metto davanti alla derivata.

La derivata di e^x e' e^x

La derivata di $\log x$ e' $1/x$

quindi:

$$y' = 5 \cdot (e^x \cdot \log x + e^x \cdot 1/x)$$

E se devo fare la derivata di un prodotto di tre o piu' funzioni?

Niente paura, la regola e' sempre la stessa ma adattata a piu' funzioni, ad esempio se devi fare la derivata della funzione:

$$y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

Allora:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

Esempio:

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = x^5 \cdot \cos x \cdot \log x$$

La derivata di x^5 e' $5x^4$

La derivata di $\cos x$ e' $-\sin x$

La derivata di $\log x$ e' $1/x$

quindi:

$$y' = 5x^4 \cdot \cos x \cdot \log x + x^5 \cdot (-\sin x) \cdot \log x + x^5 \cdot \cos x \cdot 1/x$$

cioe'

$$y' = 5x^4 \cdot \cos x \cdot \log x - x^5 \cdot \sin x \cdot \log x + x^5 \cdot \cos x \cdot 1/x$$

(3) Derivata del quoziente di due funzioni

Una cosa importante da tenere presente e' che la derivata si puo' fare solo in quei punti ove la funzione al denominatore e' diversa da zero.

Se ho il quoziente di due funzioni e ne voglio la derivata devo fare:

la derivata della prima funzione per la seconda non derivata meno la prima funzione tale e quale per la derivata della seconda, il tutto fratto la seconda funzione al quadrato.

In simboli se:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

allora

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Esempio:

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = x^4 / \sin x$$

La derivata di x^4 e' $4x^3$

La derivata di $\sin x$ e' $\cos x$

quindi:

$$y' = \frac{4x^3 \sin x - x^4 \cos x}{\sin^2 x}$$

ho messo le parentesi quadre per rendere piu' comprensibile l'espressione:

Di solito nelle scuole la dimostrazione si salta, comunque [se hai bisogno della dimostrazione](#) della regola della derivata di un quoziente, eccola:

Voglio dimostrare che se ho:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

allora ne segue:

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Parto dal rapporto incrementale per la funzione:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

il rapporto incrementale vale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] / h =$$

Faccio il minimo comune multiplo dentro parentesi quadre in modo da avere un' unica frazione:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot 1/h =$$

Ora tolgo e aggiungo (come per il prodotto) un termine intermedio: $f(x) \cdot g(x)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot 1/h =$$

Tra il primo ed il secondo termine al numeratore posso mettere in evidenza $g(x)$ e fra il terzo e quarto termine $-f(x)$; ottengo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)] - f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot 1/h =$$

Ora distribuisco il fattore $1/h$ ai due termini al numeratore:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)]/h - f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]/h}{g(x+h) \cdot g(x)} =$$

Ora passando al limite e ricordando che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$$

segue

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Come volevamo.

Esercizi:

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = \tan x$$

Cioe':

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La derivata di $\sin x$ e' $\cos x$

La derivata di $\cos x$ e' $-\sin x$

quindi

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

cioe'

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Posso esprimere il risultato in due modi diversi:

- a. ricordando che $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ho:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- b. Dividendo ogni termine per $\cos^2 x$ ho:

$$y' = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

c.

e quindi

$$y' = 1 + \tan^2 x$$

Notiamo che abbiamo dimostrato come ottenere una derivata presente nella tabella come derivata immediata: e' piuttosto frequente richiedere come esercizio di dimostrare anche cose che si dovrebbero sapere a memoria.

Calcolare la derivata della funzione:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 4}$$

La derivata di $x^2 + 2x + 5$ e' $2x + 2$

La derivata di $x^2 - 4$ e' $2x$

quindi:

$$y' = \frac{(2x + 2) \cdot (x^2 - 4) - (x^2 + 2x + 5) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

Come derivata avremmo terminato ma purtroppo bisogna semplificare l'espressione e qui e' possibile rendere l'esercizio complicato quanto vogliamo; in questo caso i calcoli sono ancora abbastanza semplici, ma, in genere, per fare bene gli esercizi occorre avere una buona conoscenza dell'algebra.

Facciamo le moltiplicazioni

$$y' = \frac{2x^3 - 8x + 2x^2 - 8 - 2x^3 - 4x^2 - 10x}{(x^2 - 4)^2}$$

Ora sommo i termini simili:

$$y' = \frac{-2x^2 - 18x - 8}{(x^2 - 4)^2}$$

Metto in evidenza -2 :

$$y' = \frac{-2(x^2 + 9x + 4)}{(x^2 - 4)^2}$$

Poiche' numeratore e denominatore non hanno fattori comuni questo e' il risultato finale

Naturalmente e' possibile mescolare le regole come nel seguente esempio:

$$y = \frac{x^2 \sin x}{\log x}$$

$x^2 \sin x$ e' un prodotto,

quindi la sua derivata e' $2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

La derivata di \log e' $1/x$

quindi :

$$y' = \frac{(2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x) \cdot \log x - x^2 \cdot \sin x \cdot 1/x}{\log^2 x}$$

Eseguo le moltiplicazioni e ove possibile semplifico:

$$y' = \frac{2x \cdot \sin x \cdot \log x + x^2 \cdot \cos x \cdot \log x - x \cdot \sin x}{\log^2 x}$$

Posso ancora mettere in evidenza la x ed ottengo il risultato:

$$y' = \frac{x(2 \sin x \cdot \log x + x \cdot \cos x \cdot \log x - \sin x)}{\log^2 x}$$

(4) Derivata di funzione di funzione

Questa e' forse l'operazione piu' importante per saper calcolare esattamente la derivata. Per fare la derivata di una funzione di funzione prima faccio la derivata della funzione esterna senza toccare quella interna e poi multiplico per la derivata di quella interna.

In simboli, se ho:

$$y = f(g(x))$$

allora:

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Vediamo di capire meglio con un esempio:

$$y = \text{sen}(\log x)$$

Prima devo fare la derivata della funzione **sen** che e' **cos**

quindi la prima parte della derivata di

sen(log x) sara' **cos(log x)** come se al posto della **x** avessimo **log x**

Ora devo fare la derivata di **log x** che e' **1/x**

quindi avro' :

$$y' = \text{cos}(\log x) \cdot 1/x$$

Per renderla piu' semplice pensate ad una cipolla: la cipolla e' fatta a strati ed io per sbucciarla devo togliere il primo strato, poi il secondo, poi il terzo ...

Anche la funzione di funzione e' fatta a strati, prima devo derivare la prima funzione lasciando inalterate le altre, poi la seconda fino all'ultimo quando mi resta la **x**

Vediamo un altro esempio;

$$y = (\log(\text{sen}\sqrt{x}))^5$$

Qui ho la funzione elevamento a potenza 5 che racchiude il logaritmo che racchiude il seno che racchiude la radice che racchiude **x**,

Prima devo fare la derivata della potenza 5:

se fosse **x⁵** la derivata sarebbe **5x⁴**, in questo caso poiche' al posto di **x** ho **log(sen√x)** la prima parte della derivata sara':

$$5(\log(\text{sen}\sqrt{x}))^4$$

Passo ora alla seconda funzione che e' il logaritmo:

se fosse **log x** la derivata sarebbe **1/x**,

poiche' al posto di **x** ho **sen√x**

la seconda parte della derivata sara':

$$1 / (\text{sen}\sqrt{x})$$

Passo ora alla terza funzione che e' il seno:

se fosse **senx** la derivata sarebbe **cosx**,

poiche' al posto di **x** ho **√x**

la terza parte della derivata sara':

$$\text{cos}\sqrt{x}$$

Passo ora alla quarta funzione che e' la radice:

la derivata di **√x** e' **1 / (2√x)** e sono arrivato alla **x** quindi questa e' l'ultima parte raccogliendo:

$$y' = 5(\log(\text{sen}\sqrt{x}))^4 \cdot [1 / (\text{sen}\sqrt{x})] \cdot \text{cos}\sqrt{x} \cdot [1 / (2\sqrt{x})]$$

(5) Esercizi di riepilogo

Ti vengono ora forniti una serie di esercizi sul calcolo della derivata: prova a farli da solo poi vai a vedere la soluzione e dalla soluzione se vuoi potrai anche vedere come l'esercizio viene svolto.

Tutti i logaritmi a meno di esplicito avviso sono da intendere a base e

Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

Esercizio 1: $y = x^3 \text{sen}2x$:

Si tratta di un prodotto fra le due funzioni:

x^3 e $\text{sen}2x$

quindi applico la **regola della derivata di un prodotto**:

$$y' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

- la derivata di x^3 e' $3x^2$
- $\text{sen}2x$ e' funzione di funzione perche' l'argomento non e' x ma e' $2x$
La prima funzione e' sen la cui derivata e' cos quindi la prima parte sara' $\text{cos}2x$
La seconda funzione e' $2x$ la cui derivata e' 2 quindi:
la derivata di $\text{sen}2x$ e' $\text{cos}2x \cdot 2$ cioe' $2\text{cos}2x$

Applicando la regola:

$$y' = 3x^2 \cdot \text{sen}2x + x^3 \cdot 2\text{cos}2x$$

$$y' = 3x^2 \text{sen}2x + 2x^3 \text{cos}2x$$

Fai attenzione perche' viene spontaneo non considerare $\text{sen}2x$, $\text{cos}2x$ come funzione di funzione e quindi e' facile sbagliare.

Esercizio 2: $y = x^2 e^x + x e^x$:

Si tratta di una somma fra le due funzioni:

$x^2 e^x$ e $x e^x$ ed ognuna di esse e' un prodotto di funzioni.

Quindi faccio la somma delle derivate:

- la derivata di $x^2 e^x$ e' $2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
(derivata del prodotto fra x^2 ed e^x)
- la derivata di $x e^x$ e' $e^x + x \cdot e^x$
(derivata del prodotto fra x ed e^x)

Quindi:

$$y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x + e^x + x \cdot e^x$$

$$y' = 3x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x + e^x$$

Raccogliendo e^x ed ordinando:

$$y' = e^x (x^2 + 3x + 1)$$

Esercizio 3: $y = 7x e^x \log x$:

il 7 e' una costante poi abbiamo il prodotto fra le tre funzioni :

x , e^x e $\log x$,

applico la **regola**:

$$y' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

- 7 e' una costante e la estraggo dalla derivata (la metto davanti ad una parentesi che contiene la derivata)
- la derivata di x e' 1
- la derivata di e^x e' e^x
- la derivata di $\log x$ e' $1/x$

Quindi

$$y' = 7 \cdot (1 \cdot e^x \cdot \log x + x \cdot e^x \cdot \log x + x \cdot e^x \cdot 1/x)$$

Nel terzo termine dentro parentesi semplifico x con $1/x$:

$$y' = 7 \cdot (1 \cdot e^x \cdot \log x + x \cdot e^x \cdot \log x + e^x)$$

raccogliendo assieme al 7 anche e^x ed ordinando:

$$y' = 7e^x (x \cdot \log x + \log x + 1)$$

Esercizio 4: $y = 4x^2 \cos(4x^3 + 6x + 2)$:

il 4 e' una costante poi abbiamo il prodotto fra le due funzioni :

x^2

e

$\cos(4x^3 + 6x + 2)$ e questa e' anche funzione di funzione:

applico la regola:

$$y' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

- 4 e' una costante e la estraggo dalla derivata (la metto davanti ad una parentesi che contiene la derivata)
- la derivata di x^2 e' $2x$
- $\cos(4x^3 + 6x + 2)$ e' funzione di funzione quindi devo applicare la regola:

$$y = f[g(x)] \rightarrow y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

o la derivata di $\cos x$ e' $-\sin x$

o la derivata di $4x^3 + 6x + 2$ e' $12x^2 + 6$

quindi la derivata e' $-\sin(4x^3 + 6x + 2) \cdot (12x^2 + 6)$

Quindi:

$$y' = 4 \cdot \{2x \cos(4x^3 + 6x + 2) + x^2 \cdot [-\sin(4x^3 + 6x + 2) \cdot (12x^2 + 6)]\} =$$

$$= 8x \cos(4x^3 + 6x + 2) - (48x^4 + 24x^2) \cdot \sin(4x^3 + 6x + 2)$$

Esercizio 5: $y = 3\sin 5x + 2\cos 5x$:

Si tratta di una somma fra le due funzioni:

$3\sin 5x$ e $2\cos 5x$

ed ognuna di queste due si puo' considerare **funzione di funzione**:

- nella prima seno e' funzione di $5x$

- nella seconda coseno e' funzione di $5x$

quindi poiche' nel primo termine della somma 3 e' una costante, la derivata di seno e' coseno e la derivata di $5x$ e' 5

e nel secondo termine della somma 2 e' una costante, la derivata di coseno e' $-\sin$ e la derivata di $5x$ e' 5.

$$y' = 3 \cdot (\cos 5x) \cdot 5 + 2 \cdot (-\sin 5x) \cdot 5$$

$$y' = 15\cos 5x - 10\sin 5x$$

Esercizio 6: $y = 3x^3 e^{x^2}$:

Si tratta di una costante 3 per il prodotto fra le due funzioni:

x^3 e e^{x^2}

e la seconda di queste due si puo' considerare **funzione di funzione**.

Infatti nella seconda e e' funzione di x^2

3 e' una costante

la derivata di x^3 e' $3x^2$

la derivata di e^x e' e^x

la derivata di x^2

e' $2x$

avro' applicando la regola della **derivata di un prodotto**:

$$y' = 3 \cdot [3x^2 \cdot e^{x^2} + x^3 \cdot e^{x^2} \cdot 2x]$$

Eseguendo i calcoli:

$$y' = 9x^2 e^{x^2} + 6x^4 e^{x^2}$$

Esercizio 7: $y = 4\sin x^3 \cdot \sin^3 x$:

Si tratta di una costante 4 per il prodotto fra le due funzioni:

$\sin x^3$ e $\sin^3 x$

ed entrambe si possono considerare **funzione di funzione**

Infatti nella prima seno e' funzione di x^3

nella seconda abbiamo la potenza 3 che e' funzione di $\sin x$

4 e' una costante

la derivata di $\sin x^3$ e' $\cos x^3 \cdot 3x^2$

la derivata di $\sin^3 x$ e' $3\sin^2 x \cdot \cos x$

avro' applicando la regola della **derivata di un prodotto**:

$$y' = 4 \cdot [\cos x^3 \cdot 3x^2 \cdot \sin^3 x + \sin x^3 \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x]$$

Eseguendo i calcoli:

$$y' = 12 x^2 \text{sen}^3 x \cdot \cos x^3 + 12 \text{sen}^2 x \cdot \text{sen} x^3 \cdot \cos x$$

Nota: in questo esercizio si giocava sulla confusione che puo' nascere fra le due scritte:

$$\text{sen } x^3$$

e

$$\text{sen}^3 x$$

la prima significa: $\text{sen}(x \cdot x \cdot x)$

la seconda significa: $\text{sen} x \cdot \text{sen} x \cdot \text{sen} x$ ed equivale a $(\text{sen } x)^3$

Esercizio 8: $y = 2 \arctang e^{2x}$:

si tratta di una funzione (arctang) di funzione (esponenziale) di funzione (2x)

Prima derivo l'arcotangente, poi l'esponenziale ed infine derivo 2x; per mostrartelo meglio fra una derivata e l'altra lascio un po' di spazio:

$$y' = 2 \frac{1}{1 + (e^{2x})^2} \cdot e^{2x} \cdot 2$$

Eseguendo i calcoli:

$$y' = \frac{4 e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$

Esercizio 9: $y = 5 \arctang (x^3 + 1)$:

Si tratta di una costante (5) moltiplicata per una funzione (arctang) di funzione ($x^3 + 1$)

Riscrivo la costante, derivo l'arcotangente, ed infine derivo $x^3 + 1$; per mostrartelo meglio fra un termine e l'altro lascio un po' di spazio:

$$y' = 5 \frac{1}{1 + (x^3 + 1)^2} \cdot 3x^2$$

Eseguendo i calcoli

$$y' = \frac{15 x^2}{1 + (x^3 + 1)^2}$$

Esercizio 10: $y = \text{sen}^3 x^4$:

Per capirlo meglio scriviamolo nella forma:

$$y = (\text{sen } x^4)^3$$

Si tratta di una funzione (potenza 3) di funzione (seno) di funzione (x^4)

derivo prima la potenza 3, poi la funzione seno ed infine derivo x^4 ; per mostrartelo meglio fra un termine e l'altro lascio un po' di spazio:

$$y' = 3(\text{sen } x^4)^2 \cdot \cos x^4 \cdot 4 x^3$$

Scrivo in forma piu' compatta rimettendo il seno nella forma esponenziale di partenza:

$$y' = 12 x^3 \text{sen}^2 x^4 \cos x^4$$

$$\text{Esercizio 11: } y = \left(\frac{1 + x^n}{1 - x^n} \right)^m$$

E' la potenza di una frazione: prima deriviamo la potenza e, successivamente la frazione; per mostrartelo meglio fra la derivata della potenza e quella della frazione lascio un po' di spazio:

$$y' = m \left(\frac{1 + x^n}{1 - x^n} \right)^{m-1} \frac{n x^{n-1} (1 - x^n) - (-n) x^{n-1} (1 + x^n)}{(1 - x^n)^2}$$

$$y' = m \left(\frac{1 + x^n}{1 - x^n} \right)^{m-1} \frac{n x^{n-1} (1 - x^n) + n x^{n-1} (1 + x^n)}{(1 - x^n)^2}$$

Possiamo scriverlo in modo piu' compatto mettendo in evidenza al numeratore $n x^{n-1}$, ottengo:

$$y' = m \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^{m-1} \cdot \frac{n x^{n-1} (1-x^n + 1+x^n)}{(1-x^n)^2}$$

$$y' = \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^{m-1} \cdot \frac{2m n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

e) Tangente ad una curva in un suo punto

Mediante la derivata e' possibile trovare la tangente ad una curva in un suo punto in maniera molto semplice e rapida senza dover usare lo scomodo [metodo del discriminante](#) come si fa in geometria cartesiana.

Per utilizzare questo metodo bisogna prima ripassare il [concetto geometrico di derivata ed il suo legame con il coefficiente angolare della retta tangente alla curva](#).

La formula della [retta generica passante per un punto](#) (fascio di rette) dalla geometria cartesiana e':

$$(y - y_0) = m \cdot (x - x_0)$$

al posto del coefficiente angolare posso sostituire la derivata della funzione calcolata nel punto (x_0, y_0) in quanto hanno praticamente lo stesso valore:

$$(y - y_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Esempio:

Calcolare la tangente alla parabola:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

nel suo punto

$$(2, -3)$$

La retta generica e':

$$(y - y_0) = m \cdot (x - x_0)$$

cioe':

$$(y + 3) = m \cdot (x - 2)$$

ora so che

$$m = f'(x_0)$$

calcolo la derivata:

$$y' = 2x - 2$$

Ne calcolo il valore per $x = 2$:

$$y'(2) = 4 - 2 = 2$$

e questo e' il valore del coefficiente angolare, quindi la tangente e':

$$(y + 3) = 2 \cdot (x - 2)$$

cioe' risolvendo:

$$y = 2x - 7$$

f) Velocita' ed accelerazione

Questo veramente sarebbe un argomento di fisica, ma storicamente e' stato questo che ha portato Newton a costruire il concetto di derivata di una funzione in un punto.

Curiosita': storicamente i matematici hanno sempre storto il naso quando hanno visto la loro materia "imbarbarirsi" con altre discipline: fino a pochi decenni fa i geometri hanno guardato dall'alto in basso gli algebristi e questi hanno fatto la stessa cosa con gli studiosi di Analisi; me ne sono reso conto quando

frequentavo l'universita' ed una delle discipline che fui costretto a studiare fu la geometria con la riga ed il compasso; pensa che per quasi un secolo dopo la scoperta di Newton e di Leibnitz molti matematici anche italiani rifiutarono l'analisi matematica perche' non "vera" matematica.

Fortunatamente oggi, con Godel, Turing e l'avvento dell'informatica parecchi pregiudizi sono spariti.

Consideriamo un punto che si muova su una traiettoria di moto vario ed il suo moto sia descrivibile con un'equazione del tipo:

$$S = f(t)$$

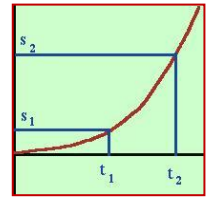
Ora se voglio la velocita' media nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 dovro' calcolare il rapporto:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

ma questo rapporto, quando prendo un intervallo di tempo molto piccolo mi corrispondera' sia alla derivata dello spazio rispetto al tempo che alla velocita' istantanea $v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \Delta s / \Delta t = ds/dt = s'(t)$

Quindi per ottenere la velocita' bastera' derivare lo spazio rispetto al tempo.

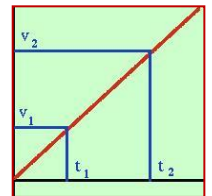


Esempio: considero l'equazione del moto uniformemente accelerato con partenza da fermo $s = 1/2 a t^2$. Se ne voglio la velocita' sara' sufficiente fare la derivata rispetto alla variabile t $v = s'(t) = 1/2 a \cdot 2t = a t$

che e' la formula per la velocita' nel moto accelerato con partenza da fermo.

Stesso discorso possiamo fare per l'accelerazione media e l'accelerazione istantanea, in pratica ne deriva che l'accelerazione istantanea e' il limite del rapporto fra la velocita' ed il tempo quando facciamo tendere a zero l'intervallo di tempo, cioe' se faccio la derivata della velocita' ottengo l'accelerazione

Negli esempi e' riportato il caso del moto uniformemente accelerato con partenza dall'origine e con velocita' iniziale zero.



In pratica, come forse ho gia' accennato la derivata interverra' in tutte le discipline dove si parlera' di qualcosa che varia al variare di qualcos'altro: ad esempio nei flussi di corrente elettrica o di magnetismo al variare del tempo, nelle variazioni di concentrazione di una soluzione in una reazione chimica, nelle variazioni di popolazione al variare del numero di predatori, eccetera...

In tutti i campi della scienza ormai e' necessario conoscere e saper utilizzare le derivate.

g) Applicazione alle forme indeterminate (Regola di De l'Hôpital)

Questa regola e' molto utile e si puo' applicare a tutte le forme indeterminate del tipo $0/0$ ed ∞/∞ .

Se ho che:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = \infty/\infty =$$

allora per calcolare il limite posso sostituire alle due funzioni le loro derivate:

$$= \lim_{x \rightarrow c} f'(x)/g'(x)$$

Stessa cosa con $0/0$ d'altra parte lo zero e' l'inverso di infinito.

Esempio: consideriamo un limite già calcolato nelle forme indeterminate:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) / (x - 2) =$$

Tale limite si presenta nella forma $0/0$

Sostituiamo al numeratore ed al denominatore le loro derivate:

La derivata di $x^2 - 4$ è $2x$

la derivata di $x - 2$ è 1

Quindi posso calcolare:

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (2x) / (1) = 4$$

Facile vero? Viene quasi da chiedersi perché non calcolare subito così le forme indeterminate. Ma pensaci bene, è più importante studiare come eseguire o esplorare ed afferrare le varie possibilità?

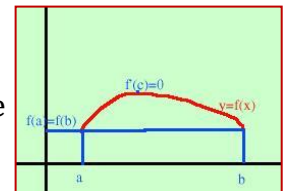
Comunque, d'ora in avanti le forme indeterminate verranno trattate utilizzando questa regola.

8. Teoremi

Si tratta di 3 teoremi di cui il primo è fondamentale e viene usato spesso negli esami per verificare la preparazione, la precisione ed il modo di ragionare del candidato; gli altri due sono generalizzazione del primo.

a) Teorema di Rolle

Questo teorema afferma che se una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato e derivabile all'interno dell'intervallo stesso e se inoltre agli estremi dell'intervallo assume lo stesso valore allora esiste almeno un punto dell'intervallo in cui la derivata della funzione vale 0.



Come si vede dalla figura in pratica vuol dire che se la funzione parte da un certo valore ed arriva allo stesso valore senza fare punte, allora, se è continua e se l'intervallo è chiuso e limitato, ci deve essere un punto dove finisce di crescere (o di diminuire) e torna indietro (si può anche dire che la tangente in quel punto è orizzontale).

Matematicamente:

se $y = f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e tale che $f(a) = f(b)$ allora esiste un punto c appartenente ad $[a, b]$ tale che $f'(c) = 0$.

L'utilizzo di questo teorema in tante verifiche sia orali che scritte risiede nel fatto che deve verificare quattro ipotesi:

- 1 - che la funzione sia continua
- 2 - che la funzione sia derivabile all'interno dell'intervallo
- 3 - che l'intervallo sia chiuso e limitato
- 4 - che i valori agli estremi dell'intervallo siano uguali.

Ora prova a dimostrare che il teorema non è verificato (cioè fai un esempio in cui il teorema non sia valido) se manca la prima ipotesi, oppure la terza, oppure la seconda e la terza...

Capisci che per risolverlo sei costretto a ragionare ed a sapere esattamente cosa si intende per funzione continua, per intervallo chiuso per intervallo limitato eccetera.

Dopo aver provato da solo confronta con [questi esempi](#) piuttosto alla buona e che non comprendono certo tutti i casi possibili:

Le ipotesi del teorema di Rolle

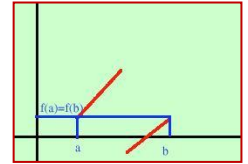
Proviamo a vedere cosa puo' succedere se manca una delle ipotesi del teorema di Rolle:

- 1 - che la funzione sia continua
- 2 - che la funzione sia derivabile all'interno dell'intervallo
- 3 - che l'intervallo sia chiuso e limitato
- 4 - che i valori agli estremi dell'intervallo siano uguali.

Caso della funzione non continua.

Sono verificate tutte le ipotesi eccetto la prima (le due parti di curva devono avere la stessa inclinazione nel punto di discontinuita').

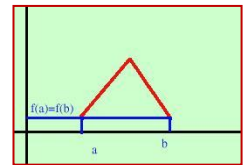
Ho utilizzato una discontinuita' di **prima specie**.



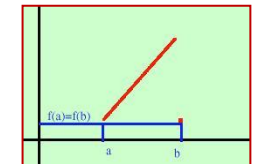
Caso della funzione non derivabile all'interno dell'intervallo:

questa non e' derivabile dove c'e' la punta

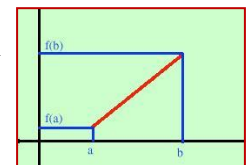
Fai attenzione che se la funzione e' derivabile all'interno e non e' derivabile sul bordo dell'intervallo il teorema vale lo stesso: sapresti fare un **esempio?**



Se la funzione fosse continua in un intervallo che non fosse chiuso, potresti pensare una discontinuita' di terza specie ad un estremo ed il teorema non sarebbe piu' valido (ho esagerato il punto sul bordo destro per renderlo piu' visibile e mostrare la discontinuita').

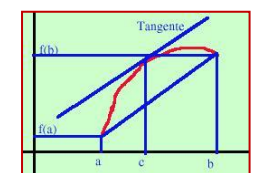


Il quarto esempio e' il piu' semplice : se i valori non fossero uguali una semplice retta mi mostrerebbe che il teorema non e' piu' valido.



b) Teorema di Lagrange

Se prendi il teorema di Rolle e lo ruoti ottieni il teorema di Lagrange (confronta le due figure, questa con quella della pagina precedente): infatti le ipotesi sono le stesse eccetto il valore uguale negli estremi [$f(a) \neq f(b)$] ed anche la tesi e' che esiste un punto in cui la tangente e' parallela al segmento congiungente gli estremi considerati della curva (vale a dire che la derivata ha la stessa inclinazione del segmento).



Matematicamente:

Data una funzione $y=f(x)$

continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile all'interno dell'intervallo allora esiste all'interno dell'intervallo un punto c tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c) Teorema di Cauchy

Se il teorema di Lagrange era una generalizzazione del teorema di Rolle ora il teorema di Cauchy e' un ampliamento del teorema di Lagrange, le ipotesi saranno le stesse eccetto il fatto che vi e' una seconda funzione che essendo ad un denominatore non dovra' mai avere valore zero nell'intervallo di validita' del teorema.

Matematicamente:

Date due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$

continue in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$

e derivabili all'interno dell'intervallo

con $g(x) \neq 0$ nell'intervallo e $g'(x) \neq 0$ all'interno dell'intervallo,

allora esiste all'interno dell'intervallo un punto c tale che:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Intuitivamente basta fare il rapporto fra due applicazioni del teorema di Lagrange sullo stesso intervallo per due funzioni diverse ricordando che la funzione al denominatore non si deve mai annullare.

9. Derivate successive

Se ho una funzione del tipo:

$$y = x^5$$

la sua derivata sara':

$$y' = 5x^4$$

Se considero la funzione $y = 5x^4$

la sua derivata sara':

$$y' = 20x^3$$

Allora posso dire che facendo la derivata due volte della funzione:

$$y = x^5$$

otterro':

$$y'' = 20x^3$$

e questa la chiamero' derivata seconda della funzione .

Posso continuare facendo la derivata terza:

$$y''' = 60x^2$$

La derivata quarta:

$$y^{IV} = 120x$$

La derivata quinta:

$$y^V = 120$$

Dalla derivata sesta in poi otterro' sempre zero.

Per gli indici delle derivate successive e' d'uso utilizzare i numeri romani.

10. Derivate parziali

Veramente per poter fare le derivate parziali bisognerebbe parlare prima di funzioni a più incognite, cioè del tipo:

$$z = f(x, y)$$

Intuitivamente sono funzioni ove le variabili indipendenti sono più di una

Nelle scuole medie superiori ho visto usarle solo nella **geometria cartesiana dello spazio** e nelle **equazioni differenziali alle derivate parziali** in qualche istituto tecnico, invece sono molto usate nel primo biennio delle università soprattutto per lo studio di superfici e di solidi.

In pratica occorre focalizzare l'attenzione su una variabile per volta considerando l'altra come una costante.

Ad esempio considero la funzione:

$$z = x^5 + 4x^4y - 3xy^4 + 6y^5$$

La sua derivata prima rispetto ad x (devo considerare y come una costante) sarà:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 16x^3y - 3y^4$$

mentre la derivata prima rispetto ad y sarà

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^4 - 12xy^3 + 30y^4$$

Se hai bisogno di vedere i calcoli nei particolari, eccoli:

Abbiamo la funzione:

$$z = x^5 + 4x^4y - 3xy^4 + 6y^5$$

Calcoliamo prima la derivata rispetto alla variabile x ; essendo una somma di funzioni farò la derivata termine a termine.

La derivata rispetto ad x di

- x^5 e' $5x^4$
- $4x^4y$ e' $4y \cdot 4x^3 = 16x^3y$
- $-3xy^4$ e' $-3y^4 \cdot 1 = -3y^4$
- $6y^5$ essendo y una costante e' 0

Calcolo ora la derivata rispetto alla variabile y .

La derivata rispetto ad y di

- x^5 essendo x una costante e' 0
- $4x^4y$ e' $4x^4 \cdot 1 = 4x^4$
- $-3xy^4$ e' $-3x \cdot 4y^3 = -12xy^3$
- $6y^5$ e' $6 \cdot 5y^4 = 30y^4$

Una cosa da tener presente e' che le derivate miste fatte con le stesse variabili e gli stessi passaggi sono uguali, cioè:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2}$$

Ponendo $\partial x^2 = \partial x \cdot \partial x$

Cioè se derivo prima due volte rispetto ad x e poi derivo rispetto ad y ottengo lo stesso risultato che otterrei derivando prima rispetto ad x poi ad y poi ancora rispetto ad x oppure derivando prima rispetto ad y e poi due volte rispetto ad x .

11. Differenziale di una funzione

In parole molto povere il differenziale di una funzione non e' altro che l'incremento **TB** fatto sulla tangente invece che sulla curva; si ha:

TB

----- = m

AB

ora e':

- $AB = dx$
- $m = f'(x)$
- ponendo $TB = df$

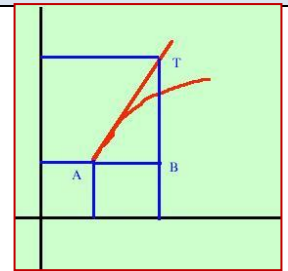
otteniamo:

df
----- = $f'(x)$
 dx

che equivale a:

$$df = f'(x) \cdot dx$$

Cioe' il differenziale di una funzione e' uguale alla derivata della funzione stessa moltiplicata per l'incremento dx.

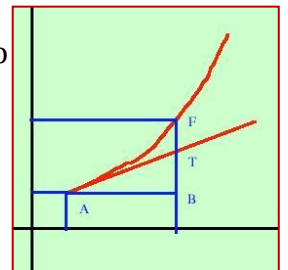


Questa differenza FT fra il differenziale della funzione TB e l'incremento della funzione FB si puo' dimostrare che e' un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dx (oppure h) e sara' poi usata per approssimare funzioni a livello locale mediante serie di funzioni: Serie di Taylor e Mac Laurin:

$$BF = BT + TF$$

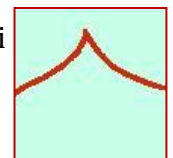
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df + a(h)$$

essendo $a(h) = TF$.

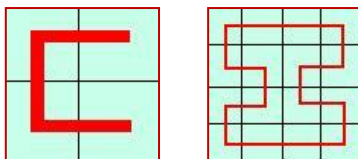


12. Relazione fra continuita' e derivabilita'

C'e' da dire subito che una funzione continua non e' sempre derivabile; infatti se ho un punto con un angolo (punto angoloso) non ho la derivata perche' la derivata destra e' diversa dalla derivata sinistra; inoltre posso pensare curve che non hanno nessun punto derivabile: la curva di Peano, la curva di von Kock.

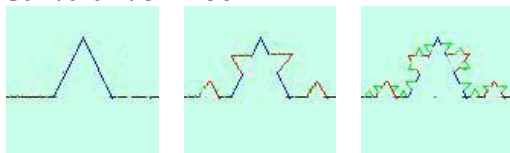


Curva di Peano



Per costruire la curva di Peano su un quadrato dividilo in 4 parti e considera i centri dei sottoquadrati, congiungili con dei segmenti (prima figura) dividi poi ognuno dei sottoquadrati in 4 sotto-sottoquadrati e congiungili come vedi nella seconda figura. Continuando il procedimento riempirai tutto il quadrato con una curva che non sara' derivabile in nessun punto.

Curva di von Kock



Prendi un segmento, dividilo in tre parti uguali e su quella in mezzo al posto del segmento prendi due lati di un triangolo equilatero, ripeti il procedimento su ognuno dei 4 segmenti così ottenuti. Procedendo all'infinito la curva che si ottiene non ha nessun punto derivabile.

Dimostriamo, a completamento della pagina, che se una funzione è derivabile allora è anche continua.

Ho per ipotesi che esiste la derivata finita $f'(x_0)$; devo dimostrare che allora la funzione è continua (tesi).

La definizione di continuità è che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

od anche:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$$

Dimostrazione.

Parto dall'espressione:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - f(x_0)$$

devo dimostrare che vale zero.

Moltiplico sopra e sotto per h:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h =$$

La prima parte del prodotto è la derivata:

$$= f'(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Come volevamo dimostrare

E. Punti di Massimo minimo e flesso

4. Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione di funzione crescente

Intuitivamente una funzione è crescente quando va verso l'alto.

Siccome siamo in un piano cartesiano diremo che è crescente quando spostando il punto sulle x verso destra il punto sulle y si sposta verso l'alto.

In simboli:

si dice che la funzione:

$$y = f(x)$$

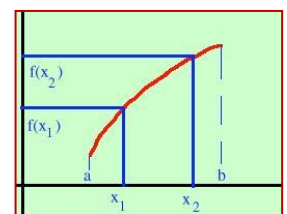
è crescente nell'intervallo:

$$[a, b]$$

se per tutti i punti dell'intervallo da:

$$x_1 < x_2 \text{ segue } f(x_1) < f(x_2)$$

cioè se prendo un punto sulle x più a destra, il punto sulle y è più in alto, oppure man mano che la x aumenta anche la y cresce.



Definizione di funzione decrescente

Intuitivamente una funzione è decrescente quando va verso il basso. Siccome siamo in un piano cartesiano, diremo che è decrescente quando spostando il punto sulle x verso destra il punto sulle y si sposta verso il basso.

In simboli:

si dice che la funzione:

$$y = f(x)$$

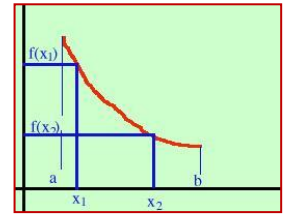
è decrescente nell'intervallo:

$$[a, b]$$

se per tutti i punti dell'intervallo da:

$$x_1 < x_2 \text{ segue } f(x_1) > f(x_2)$$

cioè se prendo un punto sulle x più a destra il punto sulle y è più in basso, oppure man mano che la x aumenta la y diminuisce.

**Legame fra la crescita/decrescenza e derivata prima**

Poiché la derivata corrisponde al coefficiente angolare della tangente, se la derivata è positiva significa che la tangente tende verso l'alto quindi la curva dovrà essere crescente.

Regola:

Se in un intervallo la derivata è positiva allora nell'intervallo la funzione sarà crescente

Se invece nell'intervallo la derivata è negativa allora la funzione sarà decrescente

Con le conoscenze che hai, se hai capito bene il concetto, dovresti riuscire a dimostrarlo; cioè a **mostrare** che, se la derivata è maggiore di zero, allora la funzione è crescente; fai attenzione che esercizi del genere sono piuttosto comuni agli esami.

Prova prima da solo:

sai che la derivata è positiva, devi dimostrare che la funzione è crescente (pensa al rapporto incrementale) cioè da:

$$x_1 < x_2 \text{ (ipotesi)}$$

devi mostrare che segue:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (tesi)}$$

Poi guarda questa **dimostrazione**:

Poniamo:

$$x_1 < x_2$$

so che:

$$m = f'(x) > 0$$

ora:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_2 - x_1$$

È una specie di grosso rapporto incrementale e, per il **teorema della permanenza del segno**, avrà lo stesso segno del limite del rapporto incrementale, cioè della derivata che è positiva.

Una frazione è positiva se sopra e sotto ha lo stesso segno e siccome sotto è positiva dovrà essere:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$f(x_2) > f(x_1)$$

Come volevamo.

Per esercizio potresti dimostrare che:

se la derivata è negativa la funzione è decrescente;

se la funzione è crescente la derivata è positiva;

se la funzione è decrescente la derivata è negativa.

5. Punto di Massimo relativo

Parleremo di massimo relativo quando considereremo il massimo in un intervallo.

Parleremo di massimo assoluto se considereremo il valore piu' alto della funzione in tutto il dominio.

Un punto di massimo relativo sara' un punto dove la funzione smette di salire e comincia a scendere.

Matematicamente dovremo dire che quel punto e' piu' alto, cioe' il suo valore e' superiore a quello degli altri punti:

In formule:

La funzione:

$$y = f(x)$$

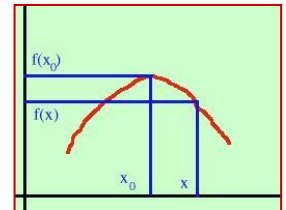
avra' un punto di massimo nel punto:

$$x_0$$

se:

$$f(x_0) \geq f(x)$$

per ogni x appartenente ad un intorno completo di x_0 .



Si puo' subito dire che, se la funzione e' continua e derivabile in un intorno completo di x_0 , allora la tangente in x_0 sara' orizzontale, cioe' la derivata avra' valore zero.

Curiosita': per la definizione data una retta orizzontale sarebbe composta da tutti punti di massimo, infatti il valore in ogni punto e' uguale a tutti gli altri valori.

Per ovviare all'inconveniente, si puo' definire il massimo con la disequaglianza stretta ($>$) invece che con il \geq . Qualche libro per distinguere parla di Massimo proprio ed improprio. Ti consiglio di seguire la definizione del tuo libro di testo.

6. Punto di minimo relativo

Parleremo di minimo relativo quando considereremo il minimo in un intervallo.

Parleremo di minimo assoluto se considereremo il valore piu' basso della funzione in tutto il dominio.

Un punto di minimo relativo sara' un punto dove la funzione smette di scendere e comincia a risalire.

Matematicamente dovremo dire che quel punto e' piu' basso, cioe' il suo valore e' inferiore a quello negli altri punti.

In formule:

La funzione

$$y = f(x)$$

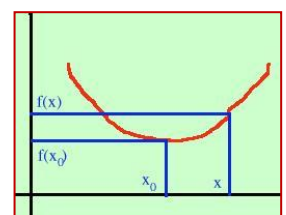
avra' un punto di minimo nel punto:

$$x_0$$

se:

$$f(x_0) \leq f(x)$$

per ogni x appartenente ad un intorno completo di x_0 .



Come prima anche qui si puo' dire che, se la funzione e' continua e derivabile in un intorno completo di x_0 , allora la tangente in x_0 sara' orizzontale, cioe' la derivata avra' valore zero.

Curiosita': anche qui per la definizione data una retta orizzontale sarebbe composta da tutti punti di minimo, infatti il valore in ogni punto e' uguale a tutti gli altri valori.

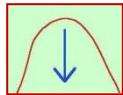
Per ovviare all'inconveniente, si puo' definire il minimo con la disequaglianza stretta ($<$) invece che con il \leq .

Qualche libro per distinguere parla di minimo proprio ed improprio. Ti consiglio di seguire la definizione del tuo libro di testo.

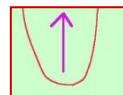
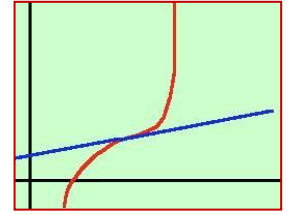
7. Punto di flesso

Un punto di flesso e' un punto dove la tangente attraversa la funzione.

Una definizione equivalente e': il punto dove la curva cambia di concavita':



Diremo che una curva presenta una concavita' verso il basso (evidenziata dalla freccia blu) quando, tracciando una qualunque tangente la curva si trova sotto la tangente.



Diremo che una curva presenta una concavita' verso l'alto (evidenziata dalla freccia viola) quando, tracciando una qualunque tangente la curva si trova sopra la tangente.

Vedremo che e' possibile collegare la concavita' di una curva con il segno che assume la sua derivata seconda.

Possiamo distinguere fra flessi ascendenti (dove la funzione e' concava a sinistra e convessa a destra) e flessi discendenti (con funzione convessa a sinistra e concava a destra). Nell'esempio ho disegnato un flesso ascendente.

Diremo che un flesso e' orizzontale quando la tangente di flesso e' orizzontale. Di solito nei Licei ci si limitava a flessi orizzontali, ma ultimamente ho visto con piacere che qualche scuola tratta anche i flessi obliqui. Nell'esempio ho disegnato un flesso obliquo. Noi tratteremo entrambe i casi.

8. Determinazione dei punti estremanti

La parola *estremante* e' bruttissima ma e' il termine tecnico. Viene definito *punto estremante* un punto in cui possiamo avere un valore di massimo o di minimo o ove la derivata prima valga zero, qualcuno vi comprende anche i punti dove il flesso e' obliquo, ma io preferisco trattare questo caso a parte.

Ricerca dei punti di massimo, minimo e flesso orizzontale.

Noi sappiamo che nei punti di massimo, di minimo e di flesso orizzontale la tangente e' orizzontale cioe' la derivata prima vale zero.

Come si fa spesso in matematica ribaltiamo la frittata: se cerchiamo i punti dove la derivata prima vale zero in questi punti ci sara' un massimo o un minimo o un flesso. Quindi la prima cosa da fare sara' calcolare la derivata prima, porla uguale a zero e risolvere l'equazione per trovare i vari punti estremali. Poi potremo scegliere fra due metodi equivalenti per decidere se il punto e' un massimo, un minimo od un flesso orizzontale:

- studio della derivata prima
- metodo delle derivate successive

Il primo metodo e' pratico e veloce, il secondo e' piu' teorico. E' preferibile usare il primo per funzioni che abbiano una derivata prima abbastanza semplice e conviene usare il secondo quando abbiamo funzioni con derivate facili da calcolare.

a) Metodo dello studio del segno della derivata prima

Questo metodo si basa sulla regola che:
se la derivata e' positiva, la funzione e' crescente;

se la derivata e' negativa, la funzione e' decrescente

sara' sufficiente trovare il segno della derivata per sapere con cosa abbiamo a che fare, facciamo un esempio per tipo:

- Massimo
- Minimo
- Flesso

Esercizio sul Massimo:

Considero la funzione:

$$y = -3x^2 - 6x - 8$$

Calcolo la derivata prima della funzione:

$$y' = -6x - 6$$

Pongo la derivata uguale a zero per cercare eventuali punti estremanti:

$$-6x - 6 = 0$$

$$-6x = 6$$

$$6x = -6$$

$$x = -1$$

Calcolo il valore della funzione di partenza nel punto -1:

$$f(-1) = -3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 8 = -5$$

Il punto $A(-1, -5)$ e' un punto estremante, devo vedere se e' un massimo, un minimo o un flesso.

Studio il segno della derivata prima:

$$-6x - 6 > 0$$

$$-6x > 6$$

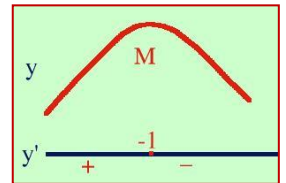
$$6x < -6$$

$$x < -1$$

cioe' per valori minori di -1 la derivata e' positiva.

Faccio un grafico (costruisco la figura dal basso verso l'alto) tracciando per y' l'orizzontale e segnando il punto $x=-1$; prima del punto la derivata e' positiva e scrivo +, dopo il punto e' negativa e metto -. Dove y' e' positiva traccio per la y una curva verso l'alto (crescente) mentre dove y' e' negativa traccio per la y una curva verso il basso (decrescente) ricordando che dove la derivata si annulla la curva deve essere orizzontale. Queste linee mi simulano l'andamento della funzione. Cio' che ottengo e' un punto di massimo, quindi $A(-1, -5)$ e' un punto di Massimo per la funzione data e lo indico con:

$$M(-1, -5)$$



In qualche testo potrai trovare invece che una riga continua con il + ed il - una riga a tratti per indicare valori negativi ed una linea continua per indicare valori positivi:

_____ -1 _____

Esercizio sul minimo:

Considero la funzione:

$$y = x^2 - 6x + 4$$

Calcolo la derivata prima della funzione:

$$y' = 2x - 6$$

Pongo la derivata uguale a zero per cercare eventuali punti estremanti:

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Calcolo il valore della funzione di partenza nel punto 3:

$$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = -5$$

Il punto $A(3, -5)$ e' un punto estremante, devo vedere se e' un massimo, un minimo o un flesso

Studio il segno della derivata prima:

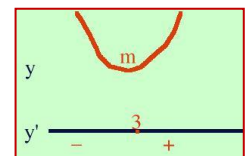
$$2x - 6 > 0$$

$$2x > 6$$

$$x > 3$$

cioe' per valori maggiori di 3 la derivata e' positiva.

Faccio un grafico (costruisco la figura dal basso verso l'alto) tracciando per y' l'orizzontale e segnando il punto $x=3$; prima del punto la derivata e' negativa e scrivo -,



dopo il punto e' positiva e metto +. Dove y' e' negativa traccio per la y una curva verso il basso mentre dove y' e' positiva traccio per la y una curva verso l'alto ricordando che dove la derivata e' nulla la curva deve essere orizzontale. Queste curve mi simulano l'andamento della funzione. Cio' che ottengo e' un punto di minimo, quindi $A(3, -5)$ e' un punto di minimo per la funzione data e lo indico con $m(3, -5)$.

Esercizio sul flesso orizzontale:

Considero la funzione:

$$y = x^3 - 2$$

Calcolo la derivata prima della funzione:

$$y' = 3x^2$$

Pongo la derivata uguale a zero per cercare eventuali punti estremanti:

$$3x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Calcolo il valore della funzione di partenza nel punto 0:

$$f(0) = 0^3 - 2 = -2$$

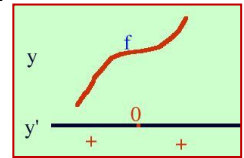
Il punto $A(0, -2)$ e' un punto estremante, devo vedere se e' un massimo, un minimo o un flesso orizzontale

Studio il segno della derivata prima:

$$3x^2 > 0$$

Essendo un quadrato x^2 e' sempre positivo cioe' la derivata e' positiva per tutti i valori eccetto 0 per cui si annulla.

Faccio un grafico (costruisco la figura dal basso verso l'alto) tracciando per y' l'orizzontale e segnando il punto $x=0$; prima del punto la derivata e' positiva e scrivo +, dopo il punto e' positiva e metto +. Dove y' e' positiva traccio per la y una curva verso l'alto ricordando che in zero (dove si annulla la derivata prima) deve essere orizzontale. Queste curve mi simulano l'andamento della funzione. Cio' che ottengo e' un flesso orizzontale ascendente, quindi $A(0, -2)$ e' un punto di flesso ascendente per la funzione data e lo indico con $f(0, -2)$.



b) Metodo delle derivate successive

Il metodo delle derivate successive dice semplicemente questo: se la derivata prima in un punto vale zero basta calcolarvi la derivata seconda:

- se la derivata seconda e' positiva in quel punto c'e' un minimo
- se la derivata seconda e' negativa in quel punto c'e' un massimo
- se la derivata seconda e' nulla occorre calcolare la derivata terza
 - se la derivata terza e' positiva in quel punto c'e' un flesso ascendente
 - se la derivata terza e' negativa in quel punto c'e' un flesso discendente
 - se la derivata terza e' nulla occorre calcolare la derivata quarta
 - se la derivata quarta e' positiva in quel punto c'e' un minimo
 - se la derivata quarta e' negativa in quel punto c'e' un massimo
 - se la derivata quarta e' nulla occorre calcolare la derivata quinta
 - eccetera eccetera

Attenzione!: per flesso intendiamo qui flesso orizzontale

Regola:

Se la prima derivata diversa da zero e' di ordine pari ed e' positiva avremo un minimo, se e' negativa un massimo;

se la prima derivata diversa da zero e' di ordine dispari ed e' positiva avremo un flesso ascendente, se e' negativa un flesso discendente.

Se ti serve puoi vedere la [dimostrazione](#). Eccola:

Dimostrazione del metodo delle derivate successive:

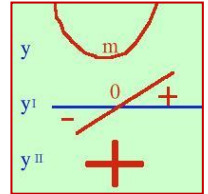
Tutte queste dimostrazioni si basano sul fatto che se la derivata e' positiva allora la funzione e' crescente e viceversa.

E, naturalmente, se la derivata e' negativa la funzione e' decrescente e viceversa.

Cioe' funzione crescente e derivata positiva sono due cose equivalenti (in matematica questo viene espresso con la notazione *se e solo se*) come anche sono equivalenti derivata negativa e funzione decrescente (meglio dire: la derivata e' negativa se e solo se la funzione e' decrescente).

Dimostriamo che se la derivata prima e' nulla e la derivata seconda e' positiva in un punto allora quel punto e' di minimo per la funzione:

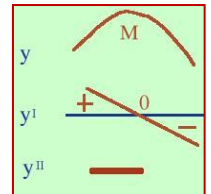
La figura va letta dal basso verso l'alto: se la derivata seconda e' positiva ne segue che la derivata prima e' crescente, ma essendo zero in un punto prima del punto sara' negativa e dopo il punto sara' positiva; allora la funzione sara' prima decrescente e poi crescente, quindi ho un minimo.



Questa dimostrazione mi e' stata chiesta all'orale dell'esame di maturita' nel lontano 1966. Tra noi studenti circolava la voce che l'esaminatore fosse l'autore di questo teorema.

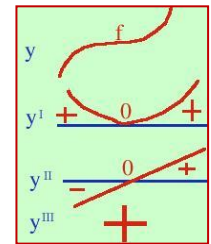
Dimostriamo che se la derivata prima e' nulla e la derivata seconda e' negativa in un punto allora quel punto e' di massimo per la funzione.

La figura va letta dal basso verso l'alto: se la derivata seconda e' negativa ne segue che la derivata prima e' decrescente, ma essendo zero in un punto prima del punto sara' positiva e dopo il punto sara' negativa; allora la funzione sara' prima crescente e poi decrescente, quindi ho un massimo.



Per finire dimostriamo che se la derivata prima e' nulla come la derivata seconda e la derivata terza e' positiva in un punto allora quel punto e' di flesso orizzontale crescente per la funzione.

La figura va letta dal basso verso l'alto: se la derivata terza e' positiva ne segue che la derivata seconda e' crescente, ma, essendo zero in un punto, prima del punto sara' negativa e dopo il punto sara' positiva; allora la derivata prima essendo nulla nello stesso punto sara' prima decrescente e poi crescente, quindi sara' al di sopra dell'asse x e tutta positiva allora la funzione sara' prima crescente (tendendo all'orizzontale) e poi ancora crescente (partendo dall'orizzontale cioe' avro' un flesso ascendente).



Come esercizio potresti dimostrare che se la derivata prima e seconda sono nulle e la derivata terza e' negativa si ha un flesso orizzontale discendente. Se riesci a farlo agevolmente significa che hai capito bene il metodo.

Facciamo alcuni esempi

- [Esempio 1 \(Massimo\)](#)
- [Esempio 2 \(Minimo\)](#)
- [Esempio 3 \(Flesso\)](#)

Esempio 1:

Calcolare i punti di eventuale massimo, minimo e flesso orizzontale della funzione:

$$y = -3x^2 - 6x - 8$$

Trovo la derivata prima della funzione:

$$y' = -6x - 6$$

Pongo la derivata uguale a zero per cercare eventuali punti estremanti:

$$-6x - 6 = 0$$

$$-6x = 6$$

$$6x = -6$$

$$x = -1$$

Calcolo il valore della funzione di partenza nel punto -1:

$$f(-1) = -3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 8 = -5$$

Il punto $A(-1, -5)$ e' un punto estremante; devo vedere se e' un massimo, un minimo o un flesso.

Trovo la derivata seconda:

$$y'' = -6$$

Ora dovrei calcolare il valore della derivata seconda sostituendo ad x il valore -1 ma in questo caso il valore della derivata seconda è costante:

$$y''(-1) = -6 < 0$$

Quindi abbiamo un massimo come avevamo già trovato (l'esercizio è stato già risolto con l'altro metodo).

Esempio 2:

Calcolare i punti di eventuale massimo, minimo e flesso orizzontale della funzione:

$$y = x^4$$

Trovo la derivata prima della funzione:

$$y' = 4x^3$$

Pongo la derivata uguale a zero per cercare eventuali punti estremanti:

$$4x^3 = 0$$

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

Calcolo il valore della funzione di partenza nel punto 0:

$$f(0) = 0^4 = 0$$

Il punto $0(0, 0)$ è un punto estremante; devo vedere se è un massimo, un minimo o un flesso.

Trovo la derivata seconda:

$$y'' = 12x^2$$

La calcolo per $x=0$:

$$y''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$$

Trovo la derivata terza:

$$y''' = 24x$$

La calcolo per $x=0$:

$$y'''(0) = 24 \cdot 0 = 0$$

Trovo la derivata quarta:

$$y^{IV} = 24$$

La calcolo per $x=0$:

$$y^{IV}(0) = 24 > 0$$

Il punto $0(0,0)$ è un minimo perché la derivata quarta (ordine pari) è nel punto maggiore di zero.

Esempio 3:

Calcolare i punti di eventuale massimo, minimo e flesso orizzontale della funzione:

$$y = x^5$$

Trovo la derivata prima della funzione:

$$y' = 5x^4$$

Pongo la derivata uguale a zero per cercare eventuali punti estremanti:

$$5x^4 = 0$$

$$x^4 = 0$$

$$x = 0$$

Calcolo il valore della funzione di partenza nel punto 0:

$$f(0) = 0^5 = 0$$

Il punto $0(0, 0)$ è un punto estremante; devo vedere se è un massimo, un minimo o un flesso.

Trovo la derivata seconda:

$$y'' = 20x^3$$

La calcolo per $x=0$:

$$y''(0) = 20 \cdot 0^3 = 0$$

Trovo la derivata terza:

$$y''' = 60x^2$$

La calcolo per $x=0$:

$$y'''(0) = 60 \cdot 0^2 = 0$$

Trovo la derivata quarta:

$$y^{IV} = 120x$$

La calcolo per $x=0$:

$$y^{IV}(0) = 120 \cdot 0 = 0$$

Trovo la derivata quinta:

$$y^V = 120$$

La calcolo per $x=0$:

$$y^V(0) = 120 > 0$$

Il punto $O(0,0)$ e' un flesso orizzontale ascendente perche' la derivata quinta (ordine dispari) e' nel punto maggiore di zero.

9. Determinazione dei punti di flesso obliquo

Veramente con questo metodo troviamo sia i flessi obliqui che quelli orizzontali.

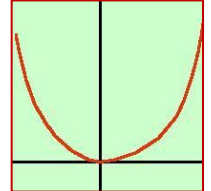
Poiche' nei punti di flesso la tangente attraversa la curva, la curva stessa dovra' a destra ed a sinistra del punto avere una concavita' di tipo diverso, quindi la determinazione del flesso e' legata alla **determinazione della concavita' della curva**:

Concavita' di una curva

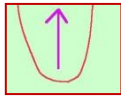
Per capire cos'e' la concavita' consideriamo una delle curve piu' semplici, la parabola passante per l'origine:

$$y = x^2$$

Essa ha la concavita' verso l'alto:

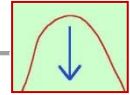


In generale vale la regola:



Se la derivata seconda e' positiva la concavita' e' verso l'alto.

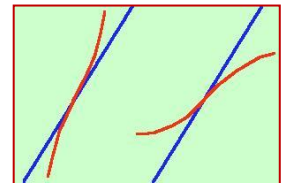
Se la derivata seconda e' negativa la concavita' e' verso il basso



Per ricordarmela, siccome ho il vizio di confondermi, penso sempre alla parabola: infatti la derivata seconda di $y = x^2$ e' 2 cioe' e' positiva e la parabola volge la concavita' verso l'alto.

Attento che dire che il flesso e' ascendente non significa necessariamente che la tangente di flesso va verso l'alto; infatti guarda la differenza fra queste due rappresentazioni di flessi con la tangente di flesso che va dal basso verso l'alto:

- il primo e' un flesso ascendente perche' la concavita' e' prima rivolta verso il basso poi verso l'alto;
- Il secondo e' un flesso discendente perche' la concavita' e' prima rivolta verso l'alto e poi verso il basso.



In pratica basta calcolare la derivata seconda e porla uguale a zero. Se nei punti in cui si annulla la derivata seconda la derivata terza e' diversa da zero avrai un punto di flesso. Successivamente puoi determinare con lo studio della derivata seconda se la concavita' e' verso l'alto o verso il basso per tracciare la curva.

Facciamo un esempio semplice. Troviamo gli eventuali flessi della funzione:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

Calcolo la derivata prima:

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Calcolo la derivata seconda:

$$y'' = 6x - 6$$

Pongo la derivata seconda uguale a zero:

$$6x - 6 = 0$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Calcolo le coordinate del punto sostituendo 1 alla x nella funzione di partenza:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$$

il punto $F(1,2)$ e' un probabile punto di flesso.

Per vedere se e' un flesso calcolo la derivata terza:

$$y''' = 6 \text{ si tratta di un flesso.}$$

Posso inoltre calcolare la tangente di flesso con la formula:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

essendo x_0 ed y_0 le coordinate del punto di flesso $F(1,2)$ ed m il valore della derivata prima nel punto:

$$y - 2 = -3(x - 1)$$

$$y = -3x + 3 + 2$$

$$y = -3x + 5$$

Ora per meglio determinare il punto di flesso ne studio la concavità studiando il segno della derivata seconda:

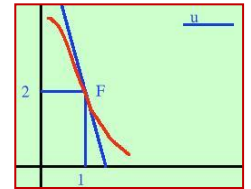
$$y'' > 0$$

$$6x - 6 > 0$$

$$6x > 6$$

$$x > 1$$

per $x < 1$ avremo la concavità verso il basso, mentre per $x > 1$ avremo la concavità verso l'alto come da figura di fianco (le proporzioni non sono troppo rispettate)



Se vuoi cimentarti con un **esempio** un po' più complicato, eccolo:

Esecizio sui flessi:

Calcoliamo i punti di flesso per la seguente funzione (curva a campana di Gauss):

$$y = e^{-x^2}$$

Trovo la **derivata prima**:

Trovo la derivata prima di:

$$y = e^{-x^2}$$

E' funzione di funzione.

Devo fare la derivata dell'esponenziale per la derivata dell'esponente:

$$y' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

Pongo la derivata prima uguale a zero (anche se sarebbe superfluo calcoliamo i punti di massimo e minimo):

$$-2xe^{-x^2} = 0$$

$x = 0$ ti ricordo che l'esponenziale non si annulla mai.

Sostituisco 0 nell'equazione iniziale per trovare la y del punto:

$$y(0) = e^{-0^2} = 1$$

$$P(0, 1)$$

Trovo la **derivata seconda**:

Trovo la derivata seconda partendo dalla derivata prima:

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

E' il prodotto fra le due funzioni $-2x$ e e^{-x^2} e la seconda e' funzione di funzione (già calcolata prima).

Applico la regola della derivata di un prodotto:

$$y'' = -2 \cdot e^{-x^2} + (-2x) \cdot (-2xe^{-x^2}) =$$

$$= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} =$$

$$\text{Raccolgo } 2e^{-x^2} :$$

$$= 2e^{-x^2} (-1 + 2x^2)$$

$$y'' = 2e^{-x^2} (-1 + 2x^2)$$

Sostituisco ad x il valore 0 per vedere se ho un massimo, un minimo o un flesso:

$$y''(0) = 2e^{-0^2} (-1 + 2 \cdot 0^2) = -2 < 0$$

$M(0, 1)$ e' un massimo e lo chiamo M .

Pongo la derivata seconda uguale a zero per trovare i flessi:

$$2e^{-x^2} (-1 + 2x^2) = 0$$

$$-1 + 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{(1/2)}$$

Ho due possibili punti di flesso, ne calcolo la y sostituendo i valori trovati nell'equazione di partenza:

$$x = +\sqrt{(1/2)}$$

$$y(+\sqrt{(1/2)}) = e^{-(+\sqrt{(1/2)})^2} =$$

$$= e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$$

Il primo punto e' $F_1(\sqrt{(1/2)}, 1/\sqrt{e})$

Sostituisco ora $x = -\sqrt{(1/2)}$
 $y(-\sqrt{(1/2)}) = e^{-\sqrt{(1/2)}} = e^{-1/\sqrt{e}}$
 $= e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$

Il secondo punto e' $F_2(-\sqrt{(1/2)}, 1/\sqrt{e})$

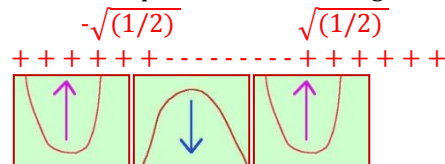
Senza scomodare la derivata terza studiamo la concavita' con la derivata seconda ponendola maggiore di zero:

$$2e^{-x^2} (-1 + 2x^2) > 0$$

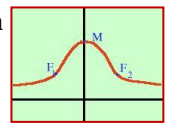
$$-1 + 2x^2 > 0$$

$$2x^2 - 1 > 0$$

E' una disequazione di secondo grado verificata per valori esterni alle radici cioe':

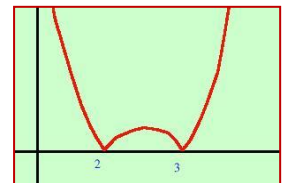


Senza andare a fare troppi calcoli per trovare le tangenti di flesso puoi vedere qui di fianco un grafico approssimato della funzione considerata.



10. Punti angolosi

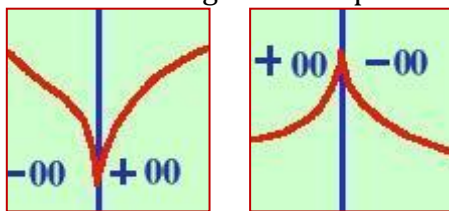
Chiameremo **punti angolosi** quei punti di funzioni continue in cui la derivata destra e' diversa dalla derivata sinistra; cioe' la tangente venendo da destra e' diversa dalla tangente approssimandomi da sinistra. un esempio immediato puo' essere dato da una funzione ai **moduli**.



Esempio

$$y = |x^2 - 5x + 6|$$

Tra i punti angolosi distinguiamo le cuspidi ove le tangenti destre e sinistre hanno coefficiente angolare una piu' e l'altra meno infinito:



Per determinare la curva nei punti angolosi basta determinarne le tangenti, con la nota formula:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

trovando la derivata destra e sinistra e calcolandone il valore per x_0 .

11. Esercizi e problemi

Esercizi su massimi minimi e flessi:

Determinare i punti di massimo, minimo e flesso per le seguenti funzioni in tutto l'intervallo di definizione:

1) $y = x^2 - 6x + 8$

Svolgimento:

Si tratta di una parabola e trovarne il massimo o il minimo significa determinarne il vertice e le derivate forniscono un metodo molto piu' semplice rispetto a quello della geometria analitica.

Trovo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = 2x - 6$$

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Trovo il valore della y corrispondente sostituendo 3 al posto di x nell'equazione di partenza:

$$y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1$$

Il punto estremante e':

$$V(3, -1)$$

Per sapere se e' un massimo od un minimo posso usare uno dei due metodi studiati:

- **studio della derivata prima:**

Pongo la derivata prima maggiore di zero per trovarne il segno

$$y' > 0$$

$$2x - 6 > 0$$

$$2x > 6$$

$$x > 3$$

Quindi ho:

$$y' \text{ ----- } 3 \text{ + + + + + + + +}$$

y **decescente** **crescente**

Quindi V(3, -1) e' un punto di minimo:

- **metodo della derivata seconda:**

Trovo la derivata seconda:

$$y'' = 2$$

Devo sostituire nella derivata seconda ad x il valore 3 (se x non c'e' resta il valore trovato):

$$y''(3) = 2 > 0$$

Quindi V(3, -1) e' un punto di minimo.

Quando e' facile fare la derivata seconda questo metodo e' molto piu' immediato; con uno qualunque dei metodi troviamo che il punto V(3, -1) e' un punto di minimo.

Nei prossimi esercizi useremo il metodo piu' semplice fra i due possibili:

- Se e' difficile trovare la derivata seconda studieremo la derivata prima
- Se e' facile trovare la derivata seconda ne calcoleremo il valore per la x trovata

In caso di uguale difficolta' io preferisco seguire il secondo metodo.

2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Svolgimento:

Qui si puo' dire subito che e' probabile trovare un punto di flesso perche' il polinomio ha grado abbastanza alto da avere una derivata seconda non costante come nell'esercizio precedente: quando ho una funzione polinomiale ogni derivata successiva mi abbassa di un grado il polinomio, quindi qui la derivata seconda uguale a zero sara' un'equazione di primo grado.

Trovo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = 3x^2 - 6x + 3$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

Divido tutto per 3:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

o applico la formula risolutiva o mi accorgo che e' un quadrato perfetto:

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ (doppia)}$$

$$x = 1$$

Trovo il valore della y corrispondente sostituendo 1 al posto di x nell'equazione di partenza:

$$y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 0$$

Il punto estremante e':

$$A(1, 0)$$

Per sapere se e' un massimo od un minimo o un flesso studiamo la derivata prima:

$$y' > 0$$

$$(x - 1)^2 > 0$$

Essendo un quadrato sempre positivo (eccetto per 1 per cui si annulla) avremo per il segno.

$$y' \text{ + + + + + } 1 \text{ + + + + +}$$

y **crescente** **crescente**

Quindi $A(1, 0)$ e' un punto di flesso orizzontale ascendente.

$$3) \quad y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Svolgimento:

L'intervallo di definizione e' tutto \mathbb{R} .

Trovo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

Una frazione e' zero quando e' zero il numeratore:

$$1 - x^2 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Ho trovato due valori per cui potrei avere dei massimi, minimi o flessi.

Trovo i valori della y corrispondente sostituendo una volta $+1$ e l'altra -1 al posto di x nell'equazione di partenza:

- $y(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = 1/2$
- $y(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -1/2$

I punti estremanti sono:

$$A(-1, -1/2) \quad B(1, 1/2)$$

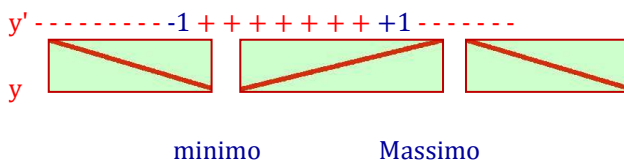
Per sapere se sono un massimi, minimi o flessi conviene studiare la derivata prima perche' essendo il denominatore sempre positivo (quadrato di due termini positivi) bastera' studiarne il numeratore:

$$y' > 0$$

$$1 - x^2 > 0$$

$$x^2 - 1 < 0$$

verificata per valori interni all'intervallo delle radici .



Come completamento dell' esercizio, proviamo a trovare i flessi obliqui.

Trovo la derivata seconda e la pongo uguale a zero (naturalmente se parti con l'intenzione di trovare i flessi per determinare i massimi e minimi conviene usare il metodo della derivata seconda):

$$y'' = \frac{-2x \cdot (x^2 + 1)^2 - (1 - x^2) \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$y'' = \frac{-2x \cdot (3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Una frazione e' zero quando e' zero il numeratore, quindi:

$$-2x \cdot (3 - x^2) = 0$$

quindi abbiamo:

$$x(3 - x^2) = 0$$

Abbiamo tre soluzioni: l'origine: $O(0,0)$ ed i punti di ascisse $x = \pm \sqrt{3}$

invece di trovare la derivata terza mi conviene studiare la derivata seconda:

$$y'' = \frac{-2x \cdot (3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} > 0$$

essendo $(x^2 + 1)$ sempre positivo, lo studio del segno si riduce a:

$-2x(3 - x^2) > 0$ cioè la derivata seconda è positiva quando quest'espressione è positiva: pongo tutte le sue parti positive: l'espressione sarà verificata dove ottengo come prodotto il segno meno (essendovi un meno davanti all'espressione). Quindi:

$$\begin{array}{l} x > 0 \quad \text{-----} 0 \text{++++++ ++++++} \\ (3-x^2) > 0 \quad \text{-----} -\sqrt{3} \text{++++++ ++++++} \sqrt{3} \text{-----} \\ \text{Prodotto:} \quad \text{+++++} \quad \text{-----} \quad \text{++++++ ++++++} \quad \text{-----} \end{array}$$

L'espressione è verificata dove il prodotto è negativo (sempre per il segno meno davanti al numeratore) cioè la derivata seconda è positiva negli intervalli:

$$[-\sqrt{3}, 0] \cup [0, \sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$$

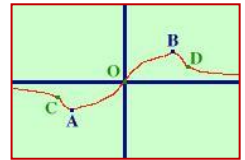
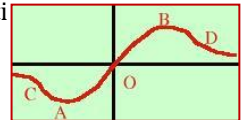
Quindi da meno infinito a $-\sqrt{3}$ la concavità è verso il basso,

da $-\sqrt{3}$ a zero è verso l'alto,

da zero a $\sqrt{3}$ è verso il basso

e da $\sqrt{3}$ a più infinito è verso l'alto.

Quindi la funzione ha tre punti di flesso indicati in figura con i punti C O D



$$x^2 - 5x + 4$$

$$4) y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$$

Svolgimento:

L'intervallo di definizione è tutto \mathbb{R} eccetto dove si annulla il denominatore cioè devo scartare i valori per cui:

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

Risolvendo $x = -1$ e $x = -4$

quindi:

$$C.E. = (-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Trovo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = \frac{(2x - 5) \cdot (x^2 + 5x + 4) - (x^2 - 5x + 4) \cdot (2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2}$$

$$y' = \frac{10x^2 - 40}{(x^2 + 5x + 4)^2} = 0$$

$$\frac{10x^2 - 40}{(x^2 + 5x + 4)^2} = 0$$

Una frazione è zero quando è zero il numeratore:

$$10x^2 - 40 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Ho trovato due valori per cui potrei avere dei massimi, minimi o flessi.

Trovo i valori della y corrispondente sostituendo una volta -2 e l'altra $+2$ al posto di x nell'equazione di partenza:

- $y(-2) = \frac{(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 4}{(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 4} = -9$
- $y(2) = \frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 4}{2^2 + 5 \cdot 2 + 4} = -1/9$

I punti estremanti sono:

$$A(-2, -9) \quad B(2, -1/9)$$

Per sapere se sono un massimi, minimi o flessi conviene studiare la derivata prima perché essendo il

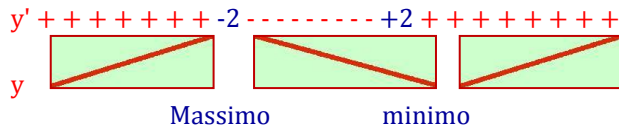
denominatore sempre positivo (quadrato di due termini positivi) bastera' studiarne il numeratore:

$$y' > 0$$

$$10x^2 - 40 > 0$$

$$x^2 - 4 > 0$$

verificata per valori esterni all'intervallo delle radici che sono -2 e +2



Quindi:

A(-2, -9) e' un Massimo e

B(2, -1/9) e' un minimo

$$5) y = x - \sqrt{2-x}$$

Svolgimento:

L'intervallo di definizione e' tutto R eccetto dove il termine sotto radice e' minore di zero cioe' devo considerare accettabili i valori per cui:

$$2 - x \geq 0$$

risolvendo:

$$-x \geq -2$$

$$x \leq 2$$

quindi:

$$C.E. = (-\infty, 2]$$

Trovo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (-1)$$

il (-1) deriva dal fatto che si deve fare derivata di funzione di funzione e la derivata di -x e' -1:

$$y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

razionalizzo:

$$y' = 1 + \frac{\sqrt{2-x}}{2 \cdot (2-x)}$$

Eseguo il m.c.m. al secondo termine:

$$y' = \frac{4 - 2x + \sqrt{2-x}}{2 \cdot (2-x)}$$

$$\frac{4 - 2x + \sqrt{2-x}}{2 \cdot (2-x)} = 0$$

Una frazione e' zero quando e' zero il numeratore (pero' il denominatore deve essere diverso da zero quindi dovra' essere $x \neq 2$):

$$4 - 2x + \sqrt{2-x} = 0$$

E' un'equazione irrazionale che **risolta** ha come soluzione accettabile:

$$x_2 = 2$$

Devo risolvere l' **equazione irrazionale**:

$$4 - 2x + \sqrt{2-x} = 0$$

isolo la radice:

$$\sqrt{2-x} = 2x-4$$

Intanto il termine sotto radice deve essere maggiore o uguale a zero cioè:

$$x \leq 2$$

Sotto queste condizioni posso elevare a quadrato da entrambe le parti:

$$(\sqrt{2-x})^2 = (2x-4)^2$$

$$2-x = 4x^2 - 16x + 16$$

$$4x^2 - 15x + 14 = 0$$

Applicando la formula risolutiva:

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 14}}{8}$$

$$x = \frac{15 \pm 1}{8}$$

Quindi le soluzioni sono:

$$x_1 = 7/4$$

$$x_2 = 2$$

e devo controllare se sono accettabili sostituendo i valori nell'equazione di partenza

- verifica per $x = 7/4$
 $\sqrt{2 - (7/4)} = 2(7/4) - 4$
 $\sqrt{(1/4)} = 14/4 - 4$
 $1/2 = -1/2$
 $x = 7/4$ non e' accettabile
- verifica per $x = 1$
 $\sqrt{2 - 2} = 2(2) - 4$
 $\sqrt{(0)} = 4 - 4$
 $0 = 0$
 $x = 1$ e' accettabile

Attenzione: quando capita una soluzione che annulla numeratore e denominatore della derivata e' un buon indizio per pensare che ci sia una cuspide, quindi se il valore e' contornato dal campo di esistenza conviene farne il limite della derivata a destra e a sinistra. Nel nostro caso si tratta di un valore all'estremo del campo ma appartenente al campo quindi ci limiteremo a calcolare il valore della funzione nel punto 2.

Calcoliamo il valore della funzione nel punto 2:

$$f(2) = 2 + \sqrt{2-2} = 2$$

La funzione e' tutta a sinistra del punto (2, 2)

6) $y = x \ln^2 x$

Svolgimento:

Invece di scrivere $\ln x$ scrivero' $\log x$ intendendo con cio' il logaritmo naturale di x .

Un errore abbastanza comune e' confondere $\log^2 x$ con $\log x^2$; sono due cose del tutto diverse:

- $\log^2 x = \log x \cdot \log x = (\log x)^2$
- $\log x^2 = \log (x \cdot x) = 2 \log x$

L'intervallo di definizione e' tutto \mathbb{R} , eccetto dove l'argomento del logaritmo e' minore od uguale a zero (ove il logaritmo non e' definito) cioe' devo considerare accettabili i valori per cui:

$$x > 0$$

quindi:

$$C.E. = (0, +\infty)$$

Trovo la derivata prima (derivata di un prodotto) e la pongo uguale a zero:

$$y' = \log^2 x + x \cdot 2 \log x \cdot 1/x$$

$$y' = \log^2 x + 2 \log x$$

$$\log^2 x + 2 \log x = 0$$

$\log x (\log x + 2) = 0$ la spezzo nelle due equazioni

- $\log x + 2 = 0$

- $\log x = -2$ accettabile: corrisponde ad $x = e^{-2}$
- $\log x = 0$ $x = 1$ accettabile

Trovo i valori della y corrispondente sostituendo prima e^{-2} e poi 1 al posto di x nell'equazione di partenza:

$$y(1) = 1 \log^2 1 = 0$$

$$y(e^{-2}) = e^{-2} \log^2 e^{-2} = e^{-2} (-2)^2 = 4 e^{-2}$$

Nei punti $A(e^{-2}, 4 e^{-2})$ e $B(1, 0)$ potrei avere un massimo, un minimo o un flesso.

Per sapere se abbiamo un massimo, un minimo o un flesso calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = 2 \log x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{2}{x} \log x + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} (1 + \log x)$$

- sostituisco ad x il valore e^{-2} :

$$y''(e^{-2}) = \frac{2}{e^{-2}} (1 + \log e^{-2}) = \frac{2}{e^{-2}} (1 - 2) < 0$$

Il punto $A(e^{-2}, 4 e^{-2})$ e' un punto di massimo.

- sostituisco ad x il valore 1:

$$y''(1) = \frac{2}{1} (1 + \log 1) = \frac{2}{1} (1 + 0) > 0$$

Il punto $B(1,0)$ e' un punto di minimo.

7) $y = 2\sin x + \cos 2x$

Svolgimento:

L'intervallo di definizione e' tutto \mathbb{R} ma essendo la funzione periodica di periodo 2π mi limitero' a cercare massimi e minimi nell'intervallo $[0, 2\pi)$

$$C.E. = (-\infty, +\infty)$$

Trovo la derivata prima e la pongo uguale a zero

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x$$

sviluppando $\sin 2x$

$$y' = 2\cos x - 4\sin x \cos x$$

$$y' = 2\cos x (1 - 2\sin x)$$

Pongo la derivata uguale a zero

$$2\cos x (1 - 2\sin x) = 0$$

la spezzo nelle due equazioni

- $2 \cos x = 0$ $\cos x = 0$
 - $x = \pi/2 + k\pi$
- $(1 - 2\sin x) = 0$ $2\sin x = 1$ $\sin x = 1/2$
 - $x = \pi/6 + 2k\pi$
 - $x = 5\pi/6 + 2k\pi$

Nell'intervallo $[0, 2\pi)$ ho quindi i valori:

$$\pi/6 \quad \pi/2 \quad 5\pi/6 \quad 3\pi/2$$

Trovo i valori della y corrispondente sostituendo i vari valori al posto di x nell'equazione di partenza

- $y(\pi/6) = 2\sin \pi/6 + \cos 2\pi/6 = 2\sin \pi/6 + \cos \pi/3 = 2 \cdot 1/2 + 1/2 = 3/2$
 $A(\pi/6, 3/2)$
- $y(\pi/2) = 2\sin \pi/2 + \cos 2\pi/2 = 2\sin \pi/2 + \cos \pi = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
 $B(\pi/2, 1)$
- $y(5\pi/6) = 2\sin(5\pi/6) + \cos 2(5\pi/6) = 2\sin(5\pi/6) + \cos(5\pi/3) = 2 \cdot 1/2 + 1/2 = 3/2$
 $C(5\pi/6, 3/2)$
- $y(3\pi/2) = 2\sin(3\pi/2) + \cos 2(3\pi/2) = 2\sin(3\pi/2) + \cos \pi = 2 \cdot (-1) + (-1) = -3$
 $D(3\pi/2, -3)$

Nei punti A, B, C, D potrei avere un massimo, un minimo o un flesso orizzontale
 Per sapere se e' un massimo, un minimo o un flesso conviene studiare la derivata prima.
 Pongo la derivata prima maggiore di zero:

$$2\cos x(1 - 2\sin x) > 0$$

Equivale a dire che esplicitando i due fattori e ponendoli maggiori di zero:

$$2\cos x > 0$$

$$1 - 2\sin x > 0$$

La funzione sara' positiva dove i due fattori hanno segni concordi.

Se hai bisogno di aiuto per risolvere le disequazioni:

Risolviamo le due disequazioni:

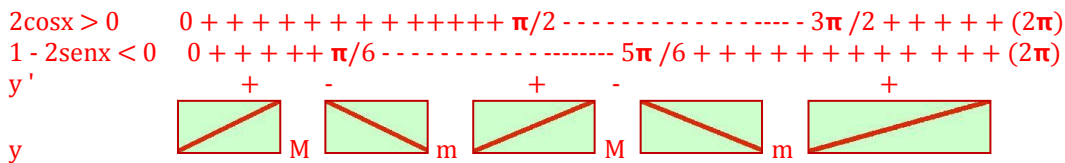
$2\cos x > 0$
 $1 - 2\sin x > 0$

la prima:
 $2\cos x > 0$
 equivale a
 $\cos x > 0$
 quindi e' positiva ove e' positivo il coseno cioe'
 $[0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi)$ quindi:

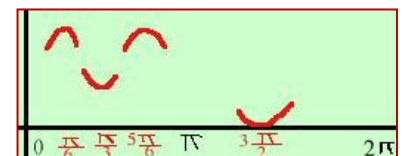
$2\cos x > 0$ $0 + + + + + \pi/2$ ----- $3\pi/2 + + + + + (2\pi)$

la seconda:
 $1 - 2\sin x > 0$
 $-2\sin x > -1$
 $2\sin x < 1$
 $\sin x < 1/2$
 la funzione e' positiva ove il seno ha valore minore di 1/2 quindi:
 $[0, \pi/6] \cup [5\pi/6, 2\pi)$
 cioe'

$1 - 2\sin x < 0$ $0 + + + + + \pi/6$ ----- $5\pi/6 + + + + + (2\pi)$



Allora possiamo dire:
 $A(\pi/6 + 2k\pi, 3/2)$ e' un punto di Massimo
 $B(\pi/2 + 2k\pi, 1)$ e' un punto di minimo
 $C(5\pi/6 + 2k\pi, 3/2)$ e' un punto di Massimo
 $D(3\pi/2 + 2k\pi, 0)$ e' un punto di minimo



Alcuni esercizi meno impegnativi ma usati spesso per vedere se e' stato effettivamente compreso il concetto di massimo e minimo e se l'alunno fa attenzione alle condizioni del problema.
 Determinare i punti di massimo e minimo per le seguenti funzioni nell'intervallo a fianco segnato.

8) $y = x^2 - 1$ $2 \leq x \leq 3$ Svolgimento:

L'unica difficolta' di questi esercizi nasce dalla frettosita' dell'alunno che letta la parola massimi e minimi si precipita a risolvere l'esercizio stesso senza considerare che invece il massimo ed il minimo va considerato in un intervallo dato. Molto spesso il valore che si trova annullando la derivata e' al di fuori dell'intervallo dato, quindi il massimo ed il minimo sono i valori della funzione nei due estremi dell'intervallo

Trovo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = 2x$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Trovo il valore della y corrispondente sostituendo 0 al posto di x nell'equazione di partenza:

$$y(0) = 0^2 - 1 = -1$$

Il punto estremante e':

$A(0, -1)$

Siccome io devo considerare i valori della funzione all'interno dell'intervallo $2 \leq x \leq 3$, non posso considerare il punto A perché è esterno; quindi il massimo ed il minimo della funzione corrisponderanno ai valori estremi dell'intervallo.

Trovo il valore delle y corrispondenti sostituendo prima 2 poi 3 al posto di x nell'equazione di partenza:

$$y(2) = 2^2 - 1 = 3$$

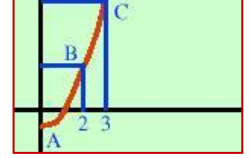
$$y(3) = 3^2 - 1 = 8$$

i punti sono:

$B(2, 3)$

$C(3, 8)$

Quindi B è il punto di minimo e C il punto di Massimo nell'intervallo considerato.



9) $y = 2\sin x \quad 0 \leq x \leq \pi$ Svolgimento:

Trovo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = 2\cos x$$

$$2\cos x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$1) x = \pi/2$$

$$2) x = 3\pi/2$$

scarto $3\pi/2$ perché fuori dell'intervallo richiesto.

Trovo il valore della y corrispondente sostituendo $\pi/2$ al posto di x nell'equazione di partenza:

$$y(\pi/2) = 2\sin \pi/2 = 2$$

Il punto estremante è:

$A(\pi/2, 2)$

Per sapere se è un massimo od un minimo sostituisco il valore della x nella derivata seconda:

$$y'' = -2\sin x$$

$$y''(\pi/2) = -2\sin(\pi/2) = -2 < 0 \text{ Massimo}$$

A è un punto di Massimo.

Devo ora vedere i valori della funzione negli estremi dell'intervallo:

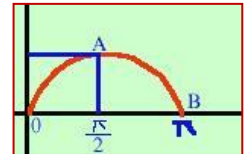
- $y(0) = 2\sin 0 = 0$
- $y(\pi) = 2\sin \pi = 0$

i punti:

$O(0,0)$

$B(\pi, 0)$

sono due punti di minimo.



10) $y = xe^{-x} \quad 1 < x < +\infty$ Svolgimento:

Trovo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$y' = e^{-x}(1 - x)$$

$$e^{-x}(1 - x) = 0$$

$$1 - x = 0$$

$$x = 1$$

Devo scartare 1 perché fuori dell'intervallo richiesto ma posso trovare il valore della y corrispondente a 1 calcolando il limite destro (cioè avvicinandomi ad 1 da dentro l'intervallo):

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} xe^{-x} = 1/e$$

Calcoliamo anche il valore per x tendente a più infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} =$$

scrivo in modo equivalente:

$$\frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

- Risolvendo con gli **ordini di infinito**:
sotto tende all'infinito piu' rapidamente e sopra meno rapidamente quindi intuitivamente quando sotto e' gia' infinito sopra e' ancora un numero: un numero diviso infinito da' zero
- Risolvendo con la **regola di De l'Hospital**

Sostituisco al numeratore e al denominatore la derivata

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Allora la funzione sara' decrescente nell'intervallo considerato ma non avra' ne' massimo ne' minimo perche' i valori estremi non fanno parte dell'intervallo.

Si potrebbe anche dire che il massimo ed il minimo esistono solamente come limite quando la funzione tende agli estremi dell'intervallo

$$11) y = \frac{x}{\ln x} \quad 0 < x \leq 2$$

Svolgimento:

La prima cosa da dire e' che l'intervallo esatto e':

$$0 < x \leq 2 \text{ con } x \neq 1$$

perche' log x non e' definito per x=0 e il denominatore della funzione si annulla per x=1.

Trovo la **derivata prima**:

Calcolo la derivata

$$y = \frac{x}{\log x}$$

si tratta di un quoziente:

applico la formula della [derivata di un quoziente](#)

$$y' = \frac{1 \cdot \log x - x \cdot (1/x)}{\log^2 x}$$

$$y' = \frac{(\log x)^2 - 1}{\log^2 x}$$

e la pongo uguale a zero:

$$y' = \frac{\log x - 1}{\log^2 x} = 0$$

$$\log x - 1 = 0$$

$$\log x = 1$$

$$x = e$$

Trovo il valore della y corrispondente sostituendo e al posto di x nell'equazione di partenza:

$$y(e) = \frac{e}{\log e} = e$$

Il punto estremante e':

$$A(e, e)$$

Siccome io devo considerare i valori della funzione all'interno dell'intervallo $0 < x \leq 2$ con $x \neq 1$ non posso considerare il punto A perche' esterno (il numero e vale circa 2,7); quindi il massimo ed il minimo della funzione saranno legati ai valori estremi dell'intervallo: 0, 1, 2.

C'e' anche da dire che non appartenendo lo zero all'intervallo di definizione in zero non avro' ne' massimo ne' minimo se non come limite.

Nel punto 0 dovro' fare il limite destro mentre nel punto 2 trovo il valore della y corrispondente sostituendo 2 al posto di x nell'equazione di partenza, infine nel punto 1 calcolero' il limite della funzione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\log x} = \frac{0}{\infty} = 0$$

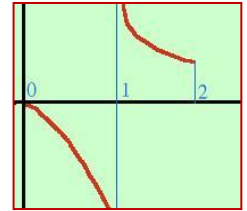
- $y(2) = \frac{2}{\log 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\log x} = \frac{1}{0} = \infty$

Quest'ultimo limite però ha valori diversi a destra ed a sinistra e precisamente:

- limite sinistro

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\log x} = \frac{1}{-} = -\infty$$
- limite destro

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\log x} = \frac{1}{+} = +\infty$$



Anche se per avere una visione corretta dovresti aver fatto gli asintoti, comunque un grafico molto intuitivo potrebbe essere quello che vedi qui a fianco.

Problemi di massimo e minimo

1) *Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ determinare quello di area massima*

Soluzione:

In tutti questi problemi la y e' cio' che deve essere massimo o minimo quindi **area = y** ; l'area del rettangolo si trova moltiplicando la base per l'altezza quindi chiamiamo x o la base o l'altezza:

$$\text{base} = x$$

Ora devo esprimere anche l'altezza mediante la x ; se so che tutto il perimetro e' $2p$, so anche che:

$$2 \text{ volte la base} + 2 \text{ volte l'altezza} = 2p$$

Essendo p un numero assegnato, quindi posso dire che:

$$\text{base} + \text{altezza} = p \text{ cioe'}$$

$$\text{altezza} = p - \text{base}$$

$$\text{altezza} = p - x$$

La mia funzione da rendere massima sara' (essendo p un numero positivo assegnato):

$$\text{area} = \text{base per altezza}$$

$$y = x(p - x)$$

$$y = px - x^2$$

Per trovare il massimo bastera' trovare la derivata prima e porla uguale a zero

$$y' = p - 2x$$

$$p - 2x = 0$$

$$p = 2x$$

poiche' vale la proprieta' simmetrica posso leggere l'uguaglianza da destra a sinistra

$$2x = p$$

$$x = p/2$$

Otengo il valore della y sostituendo $p/2$ all x nell'equazione di partenza:

$$y = px - x^2$$

$$y(p/2) = p \cdot p/2 - (p/2)^2 =$$

$$= p^2/2 - p^2/4 = p^2/4$$

$$P(p/2, p^2/4)$$

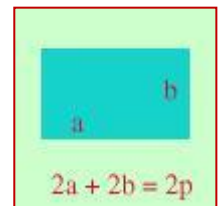
Per sapere di che si tratta trovo la derivata seconda e la calcolo in $p/2$:

$$y'' = -2$$

$$y''(p/2) = -2 < 0$$

Si tratta di un massimo cioe' per $x=p/2$ l'area del rettangolo e' massima e vale $p^2/4$.

Siccome la base e' $p/2$ anche l'altezza e' $p/2$ quindi si tratta di un quadrato e si potrebbe anche dire che il quadrato e' il rettangolo di area massima.



Risposta

Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ quello di area massima e' il quadrato.

Come vedi io cerco di fare tutti i passaggi, tu naturalmente, cerca di abbreviare.

2) *Trovare due numeri la cui somma e' 10 tale che la somma dei loro quadrati sia minima.*

Soluzione:

La y sara' la somma dei quadrati cioe'

$$y = (\text{primo numero})^2 + (\text{secondo numero})^2$$

chiamo x il primo numero:

$$\text{primo numero} = x$$

Devo esprimere il secondo numero con la x : so che:

$$\text{primo numero} + \text{secondo numero} = 10$$

$$\text{secondo numero} = 10 - \text{primo numero}$$

$$\text{secondo numero} = 10 - x$$

Scrivo la funzione:

$$y = x^2 + (10 - x)^2$$

$$y = x^2 + 100 - 20x + x^2$$

$$y = 2x^2 - 20x + 100$$

Calcolo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = 4x - 20$$

$$4x - 20 = 0$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

Trovo il valore della y in corrispondenza del valore 5 della x :

$$y(5) = 5^2 + (10 - 5)^2 = 25 + 25 = 50$$

$$P(5, 50)$$

Per vedere se si tratta di un massimo o un minimo trovo la derivata seconda e ne calcolo il valore per $x = 5$

$$y'' = 4$$

$$y''(5) = 4 > 0$$

Si tratta di un minimo; come cercavamo.

I due numeri cercati sono 5 e 5 cioe' la somma e' minima quando i due numeri sono uguali.

3) *Si dimostri per via elementare che, se due grandezze positive hanno somma costante, il prodotto e' massimo quando sono uguali.*

Esercizio assegnato alla Maturita' Scientifica sessione suppletiva 1979

soluzione:

La y sara' il prodotto cioe':

$$y = (\text{prima grandezza}) \cdot (\text{seconda grandezza})$$

chiamo x la prima grandezza:

$$\text{prima grandezza} = x$$

So che la somma delle due grandezze e' costante quindi la chiamo s :

$$\text{somma delle due grandezze} = s$$

Essendo s un numero positivo assegnato ed essendo positive anche le due grandezze, devo esprimere la seconda grandezza con la x ; so che:

$$\text{prima grandezza} + \text{seconda grandezza} = s$$

$$\text{seconda grandezza} = s - \text{prima grandezza}$$

$$\text{seconda grandezza} = s - x$$

Scrivo la funzione:

$$y = x(s - x)$$

$$y = sx - x^2$$

Calcolo la derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = s - 2x$$

$$s - 2x = 0$$

$$-2x = -s$$

$$2x = s$$

$$x = s/2$$

Trovo il valore della y in corrispondenza del valore $s/2$ della x :

$$y(s/2) = s \cdot s/2 - (s/2)^2 = s^2/2 - s^2/4 = s^2/4$$

$$P(s/2, s^2/4)$$

Per vedere se si tratta di un massimo o un minimo trovo la derivata seconda e ne calcolo il valore per $x = s/2$:

$$y'' = -2$$

$$y''(s/2) = -2 < 0$$

Si tratta di un massimo; come cercavamo.

Se la prima grandezza è $s/2$, la seconda sarà:

$$\text{seconda grandezza} = s - x = s - s/2 = s/2$$

Le due grandezze sono uguali; come volevamo.

4) Determinare il valore del parametro a perché la funzione π

$$y = a \sin x + \cos^2 x$$

abbia un flesso nel punto di ascissa $x = 7/6 \pi$

Parte di esercizio assegnato alla Maturita' Scientifica sessione suppletiva 1983.

Soluzione:

Questo veramente più che di massimo e di minimo sarebbe un problema di flesso ma penso che in mezzo agli altri stia bene anche lui

Per risolvere questo problema basta trovare la derivata seconda, sostituire alla x il valore $7/6\pi$ e porla uguale a zero. Otterro' un'equazione in a e risolvendola trovero' il valore di a .

Trovo le derivate prima e seconda:

$$y' = a \cos x + 2 \cos x (-\sin x)$$

$$y' = a \cos x - 2 \sin x \cos x$$

$$y'' = -a \sin x - 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$$

$$y'' = -a \sin x + 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x$$

Calcolo la derivata seconda per $x = 7/6\pi$:

$$y''(7/6\pi) = -a \sin 7/6\pi + 2 \sin^2 7/6\pi - 2 \cos^2 7/6\pi$$

So che

$$\sin 7/6\pi = -1/2$$

$$\cos 7/6\pi = -\sqrt{3}/2$$

$$y''(\pi) = -a \cdot (-1/2) + 2 \cdot (-1/2)^2 - 2 \cdot (-\sqrt{3}/2)^2$$

$$y''(\pi) = a/2 + 2 \cdot (+1/4) - 2 \cdot (+3/4)$$

$$y''(\pi) = a/2 + 1/2 - 3/2$$

$$y''(\pi) = a/2 - 1$$

Pongo la derivata seconda uguale a zero perché così nel punto di ascissa $7/6\pi$ c'è un punto di flesso:

$$a/2 - 1 = 0$$

$$a = 2$$

Quindi per $a=2$ la funzione diventa $y = 2 \sin x + \cos^2 x$ e dovrebbe avere un punto di flesso per $x=7/6\pi$

Per vedere però se effettivamente è un punto di flesso dobbiamo trovare la derivata terza e vedere se il suo valore per $7/6\pi$ è diverso da zero.

$$y''' = -2 \sin x + 4 \sin x \cos x + 4 \cos x \sin x$$

$$y''' = -2 \sin x + 8 \sin x \cos x$$

$$y'''(7/6\pi) = -2 \cdot (-1/2) + 8 \cdot (-1/2) \cdot (-\sqrt{3}/2)$$

Senza nemmeno fare i calcoli vedo dai segni che viene un valore positivo quindi siamo di fronte effettivamente ad un flesso come volevamo

5) In una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ si conduca una corda AC tale che l'angolo CAB sia uguale a $2x$. Detto D il punto medio dell'arco BC si determini x in modo che l'area del quadrilatero $ACDB$ risulti massima.

esercizio assegnato alla Maturita' Scientifica sessione suppletiva 1975

[soluzione](#)

6) *Si determini l'altezza ed il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto ad una data sfera di raggio r . Si dimostri poi che il suddetto cono e' anche quello di minima superficie totale.*

esercizio assegnato alla Maturita' Scientifica sessione unica 1972

[soluzione](#)

7) *Fra le piramidi rette a base quadrata aventi la stessa superficie laterale si determini quella di volume massimo.*

Maturita' Scientifica sessione suppletiva 1985

[soluzione](#)

F. Asintoti

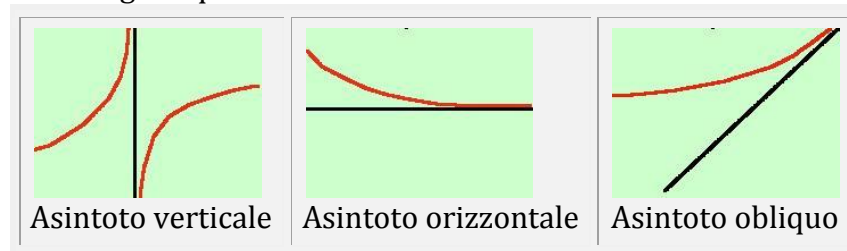
Se cio' che ci proponiamo e' di tracciare il grafico di una funzione allora diventa importante cercare di capire come questa funzione si comporta quando i suoi valori per la x e/o per la y crescono oltre ogni limite. A cio' risponde lo studio degli asintoti di una funzione.

4. Il concetto di asintoto

Asintoto e' una parola che deriva dal greco: a privativo che significa no e symptein che significa congiungere cioe' significa *che non tocca*, in pratica si tratta di una retta che si avvicina alla funzione senza mai toccarla, per questo si dice anche che l'asintoto e' *la tangente all'infinito della funzione*.

Quindi se non sappiamo come si comporta una funzione all'infinito sappiamo pero' come all'infinito si comporta una retta e se troviamo l'equazione della retta che accompagna la funzione all'infinito (asintoto) potremo tracciare il grafico della funzione che tende all'infinito con buona approssimazione.

Una funzione puo' tendere all'infinito avvicinandosi ad una retta in tre modi diversi come puoi vedere dalle tre figure qui sotto:



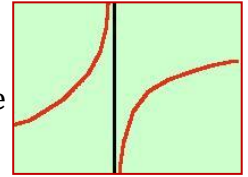
- Asintoto verticale: quando la x si avvicina ad un valore finito la funzione tende all'infinito avvicinandosi ad una retta verticale.
- Asintoto orizzontale: quando la x tende all'infinito la funzione si avvicina ad una retta orizzontale.
- Asintoto obliquo: quando la x tende all'infinito la funzione tende all'infinito avvicinandosi ad una retta obliqua.

Da notare che l'asintoto orizzontale esclude l'asintoto obliquo e viceversa perche' al crescere della x la funzione puo' andare all'infinito in un solo modo.

5. Asintoto verticale

Si ha un **asintoto verticale** quando, all'avvicinarsi della x ad un valore finito, il valore della y cresce all'infinito.

Poiché il valore infinito è solo una convenzione ne deriva che la funzione avrà valore infinito dove la x non è definita, cioè per valori non appartenenti al **campo di esistenza**.



Quindi per trovare gli asintoti verticali dovremo trovare quei valori della x per cui la funzione vale infinito, cioè supponendo che nel punto $x = c$ la funzione non sia definita dovremo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) =$$

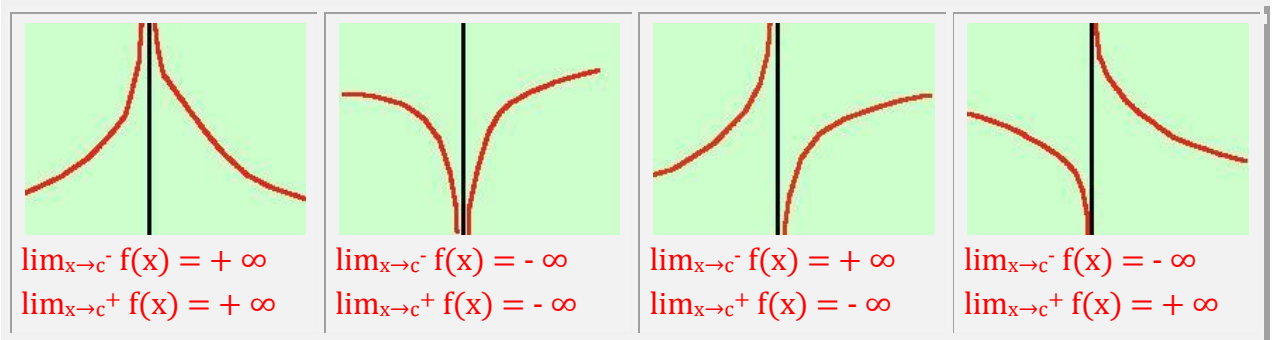
se il risultato vale ∞ , allora la retta:

$x = c$ sarà l'asintoto verticale

È bene al fine di calcolare esattamente come la funzione sparisce all'infinito calcolare sia il limite destro che il limite sinistro per trovare il segno dell'infinito a destra e a sinistra dell'asintoto.

Ricordati del **teorema della permanenza del segno** che ti permette di assegnare all'infinito (anche se non esiste) un segno positivo o negativo.

I quattro casi possibili sono rappresentati qui sotto:



Facciamo un esercizio semplicissimo. Vediamo se la funzione:

$$y = \frac{3x}{x-1}$$

ha asintoti verticali.

Il campo di esistenza è tutti i valori eccetto $x = 1$ per cui si annulla il denominatore; calcolo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x-1} = \frac{3}{0} = \infty$$

quindi la retta:

$$x = 1$$

è un asintoto verticale.

Per tracciarlo al meglio calcoliamo i limiti destro e sinistro della funzione nel punto 1:

- limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{x-1}$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino

piu' piccolo di 1 (ad esempio 0,9) e fare il conto dei segni:

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 0,9 \\ \hline 0,9 - 1 \end{array}$$

Il numeratore e' positivo mentre il denominatore e' negativo, quindi l'espressione e' negativa cioe':

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{x-1} = -\infty$$

- limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x}{x-1}$$

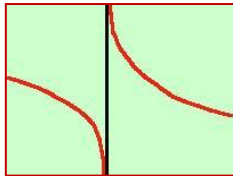
Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' grande di 1 (ad esempio 1,1) e fare il conto dei segni:

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 1,1 \\ \hline 1,1 - 1 \end{array}$$

Il numeratore e' positivo ed anche il denominatore e' positivo; quindi l'espressione e' positiva cioe':

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x}{x-1} = +\infty$$

Quindi il risultato e' quello della figura qui sotto



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

6. Asintoto orizzontale

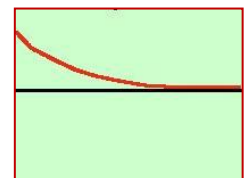
Si ha un asintoto orizzontale quando, al crescere della x la y si avvicina ad un valore ben determinato.

In pratica c'e' l'asintoto se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \text{numero}$$

e l'asintoto sara' la retta orizzontale:

$$y = \text{numero}$$



E' inoltre possibile calcolare se rispetto all'asintoto la funzione si trovi sopra o sotto, sostituendo al numero dell'asintoto un numero piu' piccolo o piu' grande e vedendo se l'orizzontale relativa taglia o no la funzione; ma io penso che cio' sia inutile, in quanto in uno studio completo di funzione si hanno parecchi altri dati da cui ricavare se la funzione si avvicina all'asintoto da sopra o da sotto.

Facciamo anche qui un esercizio molto semplice: calcoliamo, se esiste, l'asintoto orizzontale per la funzione:

$$y = \frac{3x}{x-1}$$

In pratica devo calcolarne il limite per x tendente ad infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = 3$$

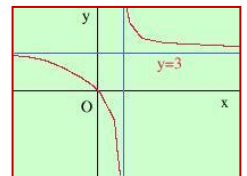
Infatti numeratore e denominatore hanno lo stesso grado ed il rapporto fra le x di grado maggiore e' 3. Se non hai capito bene come ho fatto ridai un'occhiata alle [forme indeterminate](#) oppure puoi calcolare la derivata sopra e sotto e rifare il limite come abbiamo visto [nelle applicazioni sulle derivate](#).

Quindi la retta:

$$y = 3$$

sara' l'asintoto orizzontale.

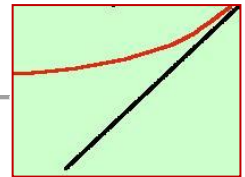
La funzione e' la stessa che abbiamo usato per l'asintoto verticale e con i dati che ho posso cominciare ad abbozzarne un eventuale grafico (per tracciarlo effettivamente mi mancano ancora parecchi dati).



7. Asintoto obliquo

Si ha un asintoto obliquo quando la funzione, andando verso infinito si avvicina ad una retta obliqua .

C'e' da dire subito che l'asintoto obliquo non esiste sempre perche' una funzione andando all'infinito potrebbe avvicinarsi all'orizzontale oppure crescere avvicinandosi ad una parabola o ad una cubica..... Questo pero' esula da questo corso.



Vediamo quali sono le condizioni perche' una funzione ammetta asintoto obliquo della forma:

$$y = mx + q$$

Prima di tutto bisogna dire che la funzione deve tendere all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

poi devono esistere m e q , cioe' devono esistere finiti i due limiti:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = m$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = q$

Ti consiglio di dare un'occhiata alla [dimostrazione](#):

voglio dimostrare che per l'asintoto vale:

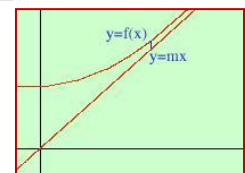
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$$

e

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

Iniziamo dal primo limite: poiche' si tratta di trovare il coefficiente angolare possiamo prendere una qualunque tra le infinite rette parallele con lo stesso coefficiente angolare e quindi mi pongo nella condizione piu' favorevole considerando una retta passante per l'origine $y = mx$.

L' asintoto e' la retta che avvicina la funzione quindi se prendo sulla verticale la differenza fra la funzione e la retta questa deve diventare sempre piu' piccola cioe':



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} mx$$

Estraggo la m dal limite (posso farlo perché non dipende da x):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = m \lim_{x \rightarrow \infty} x$$

ricavo la m :

$$m = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$$

e quindi ottengo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$$

Per il secondo limite faccio lo stesso ragionamento ma con una retta qualunque:

$$y = mx + q$$

L'asintoto è la retta che avvicina la funzione quindi se prendo sulla verticale la differenza fra la funzione e la retta questa deve diventare sempre più piccola cioè:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx - q) = 0$$

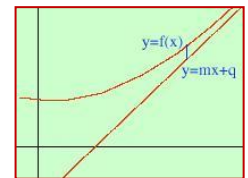
Poiché q non dipende da x posso estrarlo dal limite e portarlo al secondo termine:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) - q = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = q$$

e leggendo a rovescio:

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$



Facciamo anche qui un semplice esercizio. Trovare l'asintoto obliquo per la funzione:

$$y = \frac{3x^2 - 1}{x}$$

si ha subito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x} = \infty$$

Infatti il numeratore ha grado superiore al denominatore.

Se non hai capito bene come ho fatto ridai un'occhiata alle [forme indeterminate](#) oppure puoi calcolare la derivata sopra e sotto e rifare il limite come abbiamo visto [nelle applicazioni sulle derivate](#).

Ora vado a calcolare (se esistono) m e q.

Dividere una funzione per x vuol dire moltiplicarne il denominatore per x quindi:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2} = 3$$

quindi $m = 3$

calcolo q:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x} - 3x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1 - 3x^2}{x} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

quindi $q = 0$

l'asintoto e' la retta:

$$y = 3x.$$

8. Nota sulla determinazione degli asintoti orizzontali od obliqui

E' possibile, semplicemente osservando la forma di una funzione, capire se la funzione ha un asintoto orizzontale, un asintoto obliquo oppure non ha asintoti di quel genere.

Basta ricordare che per i limiti nelle **forme indeterminate** :

- Se il numeratore ha lo stesso ordine di infinito del denominatore allora il limite e' uguale al rapporto fra i due termini di grado piu' alto. Nel seguente esempio l'ordine di infinito del numeratore e del denominatore sono entrambe uguali ad 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 2 \log x) / 4x = 3/4$$

- se il numeratore ha ordine di infinito inferiore al denominatore allora il limite vale 0
esempio:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + \log x) / e^x = 0$$

Allora possiamo dire che:

- a. se nella funzione l'ordine del numeratore e' uguale a quello del denominatore, avremo un asintoto orizzontale del tipo:

$$y = \text{numero}$$

- b. se nella funzione l'ordine del numeratore e' inferiore a quello del denominatore, avremo un asintoto orizzontale del tipo:

$$y = 0$$

- c. se nella funzione l'ordine del numeratore e' superiore di uno a quello del denominatore, avremo un asintoto obliquo del tipo:

$$y = mx + q$$

Infatti poiche' per calcolare **m** dobbiamo fare il limite di $f(x)/x$, dobbiamo

moltiplicare il denominatore per **x** cioe' aggiungere un grado al denominatore ed il

limite sara' un numero se numeratore e denominatore arrivano allo stesso grado

- d. se nella funzione l'ordine del numeratore e' superiore di due, tre,.... a quello del denominatore non avremo un asintoto obliquo, ma la funzione andra' all'infinito accompagnando una parabola, una cubica,....

Infatti, poiche' per calcolare **m** dobbiamo fare il limite di $f(x)/x$, dobbiamo

moltiplicare il denominatore per **x** cioe' aggiungere un grado al denominatore il

limite sara' infinito perche' il numeratore supera comunque di grado il

denominatore.

Esempi:

- a. $3x$

$$y = \frac{\quad}{x - 1}$$

ha un asintoto orizzontale perche' numeratore e denominatore hanno entrambi grado uno ed il rapporto fra i termini di grado piu' alto e' $3x/x = 3$ quindi

asintoto orizzontale $y = 3$.

- b. $x - 1$

$$y = \frac{\quad}{x^2}$$

poiche' il grado del numeratore e' inferiore a quello del denominatore si ha:
asintoto orizzontale $y = 0$.

c.
$$y = \frac{3x^2 - 1}{x}$$

ha un asintoto obliquo perche' il grado del numeratore e' due e quello del denominatore e' uno quindi quando faro' $f(x)/x$ otterro' una frazione con lo stesso grado al numeratore e al denominatore ($m = 3$)

d.
$$y = \frac{3x^4 - 1}{x}$$

la funzione non ha un asintoto che la accompagni all'infinito

9. Esercizi

Vediamo ora alcuni esercizi in ordine di difficoltà, sapresti dire solo guardando l'esercizio che **tipo di asintoto ha?**

1)
$$y = \frac{x^4 - 1}{x}$$

In questo caso possiamo dire che esiste un asintoto verticale che sara' la retta $x=0$ (valore che annulla il denominatore) mentre non ci sara' ne' asintoto orizzontale ne' obliquo perche' il grado del numeratore supera di due quello del denominatore,

2)
$$y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$$

Possiamo dire che esistono due asintoti verticali in corrispondenza dei valori che annullano il denominatore ($x=2$ e $x=-2$) mentre non ci sara' ne' asintoto orizzontale ne' obliquo perche' il grado del numeratore supera di due quello del denominatore,

3)
$$y = \frac{x^5}{x^3 - 4x}$$

Esistono tre asintoti verticali in corrispondenza dei valori che annullano il denominatore ($x=0$ $x=2$ e $x=-2$) mentre non ci sara' ne' asintoto orizzontale ne' obliquo perche' il grado del numeratore supera di due quello del denominatore,

4)
$$y = \frac{x^5}{x^3 - x^2 - 9x + 9}$$

Esistono tre asintoti verticali in corrispondenza dei valori che annullano il denominatore (si tratta di un **raccoglimento a fattor comune parziale**) mentre non ci sara' ne' asintoto orizzontale ne' obliquo ,

5)
$$y = \frac{x^5}{x^3 - 7x + 6}$$

Possono esistere uno o tre asintoti verticali in corrispondenza dei valori che annullano il denominatore dipendentemente dal fatto se ne e' possibile la scomposizione in fattori reali; puoi utilizzarle la **scomposizione di Ruffini** mentre non ci sara' ne' asintoto orizzontale ne' obliquo,

6)
$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

non puo' esistere l'asintoto verticale perche' il denominatore non si annulla mai, invece in questo caso esiste l'asintoto orizzontale che e' l'asse delle x ($y=0$),

$$7) y = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$$

Anche in questo caso non puo' esistere l'asintoto verticale perche' il denominatore non si annulla mai, invece esiste l'asintoto orizzontale che e' la retta $y=2$,

$$8) y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$$

non puo' esistere l'asintoto verticale perche' il denominatore non si annulla, invece esistera' l'asintoto obliquo perche' il numeratore supera di un grado il denominatore ed avra' la forma $y = 1x + q$,

$$9) y = \frac{7x^4}{x^2 + 4}$$

Non abbiamo asintoti di nessun tipo,

$$10) y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

abbiamo due asintoti verticali ($y=2$ e $y=-2$), c'e' anche l'asintoto obliquo con la forma $y = 1x + q$,

$$11) y = \frac{x^2}{x^3 - 7x + 6}$$

Possono esistere uno o tre asintoti verticali in corrispondenza dei valori che annullano il denominatore dipendentemente dal fatto se ne e' possibile la scomposizione in fattori reali; puoi utilizzare la [scomposizione di Ruffini](#); vi sara' inoltre l'asintoto orizzontale $y = 0$

$$12) y = \frac{x^4 - 1}{x^3 - x^2 - 9x + 9}$$

Esistono tre asintoti verticali in corrispondenza dei valori che annullano il denominatore (si tratta di un [raccoglimento a fattore comune parziale](#)) ci sara' inoltre l'asintoto obliquo del tipo $y = 1x + q$ „

$$13) y = \frac{x}{\log x}$$

Ha l'asintoto verticale $x=1$.

Non possono esistere asintoti orizzontali (il grado del numeratore e' superiore a quello del denominatore)
Non puo' esistere l'asintoto obliquo perche' il grado del numeratore non supera di uno il grado del denominatore.

$$14) y = \frac{e^x}{\log x}$$

Ha l'asintoto verticale $x=1$, mentre non possono esistere ne' l'asintoto orizzontale ne' l'asintoto obliquo perche' il grado del numeratore supera di piu' di uno il grado del denominatore.

$$15) y = \frac{\log x}{e^x}$$

Non ha l'asintoto verticale perche' l'esponenziale non si annulla mai mentre ha l'asintoto orizzontale $y = 0$
trovare gli asintoti per le seguenti funzioni.

$$1) y = \frac{x^4 - 1}{x}$$

Soluzione:

Trovare l'equazione degli asintoti per la funzione:

$$y = \frac{x^4 - 1}{x}$$

il campo di esistenza e' tutti i valori eccetto $x = 0$ per cui si annulla il denominatore;
calcolo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 1}{x} = -1/0 = \infty$$

Quindi la retta:

$$x = 0$$

e' un asintoto verticale (sarebbe poi l'asse delle y).

Per tracciare al meglio l'andamento della funzione vicino all'asintoto calcoliamo i limiti destro e sinistro della funzione nel punto 0:

- limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 - 1}{x}$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' piccolo di 0 (ad esempio -0,1) e fare il conto dei segni:

$$\frac{(-0,1)^4 - 1}{-0,1}$$

Il numeratore e' negativo come il denominatore quindi l'espressione e' positiva cioe':

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 - 1}{x} = +\infty$$

- limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 1}{x}$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' grande di 0 (ad esempio 0,1) e fare il conto dei segni:

$$\frac{(+0,1)^4 - 1}{+0,1}$$

Il numeratore e' negativo mentre il denominatore e' positivo quindi l'espressione e' negativa cioe':

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 1}{x} = -\infty$$

Quindi il risultato e' quello della figura qui sotto:



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Per quanto riguarda l'asintoto orizzontale od obliquo possiamo dire che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x} = \infty$$

Potrebbe esistere l'asintoto obliquo della forma $y = mx + q$ ma:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

infatti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^2} = \infty = m$$

quindi m non e' definita e non esiste l'asintoto obliquo.

E' piu' semplice dire che non puo' esistere l'asintoto obliquo perche' il numeratore supera di piu' di un grado il denominatore.

2) $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$ [soluzione:](#)

Trovare l'equazione degli asintoti per la funzione

$$y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$$

il campo di esistenza e': tutti i valori reali eccetto i valori $x = -2$ e $x = 2$ per cui si annulla il denominatore

C.E. = $(-\infty, -2[U] -2, +2[U] +2, +\infty)$

calcolo:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^4}{x^2 - 4} = 4/0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^4}{x^2 - 4} = 4/0 = \infty$$

quindi le rette:

$$x = -2 \quad x = 2$$

sono due asintoti verticali.

Per tracciare al meglio l'andamento della funzione vicino agli asintoti calcoliamo i limiti destro e sinistro della funzione nei punti di ascissa -2 e +2

I. Per x tendente a -2:

- Limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^4}{x^2 - 4} =$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' piccolo di -2 (ad esempio -2,1) e fare il conto dei segni:

$$\frac{(-2,1)^4}{(-2,1)^2 - 4}$$

$$\frac{(-2,1)^4}{(-2,1)^2 - 4}$$

Il numeratore e' positivo come il denominatore, quindi l'espressione e' positiva cioe':

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^4}{x^2 - 4} = +\infty$$

Nota bene! Quando in matematica si parla di valore piu' piccolo di un altro si intende non una quantita' minore in valore assoluto ma il fatto che il valore si trova piu' a sinistra sulla retta reale, quindi -2,1 e' piu' piccolo di -2

Similmente quando si parla di un valore maggiore di un altro si intende che il valore si trova piu' a destra sulla retta reale quindi -1,9 e' piu' grande di -2

Se metti tutti i valori su una retta a sinistra hai i valori piu' piccoli ed a destra i piu' grandi

- Limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^4}{x^2 - 4} =$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' grande di -2 (ad esempio -1,9) e fare il conto dei segni:

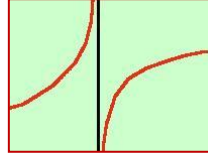
$$\frac{(-1,9)^4}{(-1,9)^2 - 4}$$

$$\frac{(-1,9)^4}{(-1,9)^2 - 4}$$

Il numeratore e' positivo mentre il denominatore e' negativo quindi l'espressione e' negativa cioe':

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^4}{x^2 - 4} = -\infty$$

Quindi il risultato e' quello della figura qui sotto:



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \quad x = -2 \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

Nota bene!

Quando in matematica si parla di valore piu' piccolo di un altro si intende non una quantita' minore in valore assoluto ma il fatto che il valore si trova piu' a sinistra sulla retta reale, quindi $-2,1$ e' piu' piccolo di -2 .

Similmente quando si parla di un valore maggiore di un altro si intende che il valore si trova piu' a destra sulla retta reale quindi $-1,9$ e' piu' grande di -2 .

Se metti tutti i valori su una retta a sinistra hai i valori piu' piccoli ed a destra i piu' grandi.

II. Per x tendente a +2

- Limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow +2^-} \frac{x^4}{x^2 - 4} =$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' piccolo di 2 (ad esempio 1,9) e fare il conto dei segni:

$$\frac{(1,9)^4}{(1,9)^2 - 4}$$

Il numeratore e' positivo mentre il denominatore e' negativo quindi l'espressione e' negativa cioe':

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4}{x^2 - 4} = -\infty$$

- Limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4}{x^2 - 4} =$$

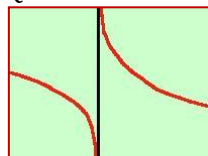
Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' grande di 2 (ad esempio 2,1) e fare il conto dei segni:

$$\frac{(2,1)^4}{(2,1)^2 - 4}$$

Il numeratore e' positivo come il denominatore quindi l'espressione e' positiva cioe':

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4}{x^2 - 4} = +\infty$$

Quindi il risultato e' quello della figura qui sotto:



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad x = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Per quanto riguarda l'asintoto orizzontale od obliquo possiamo dire che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^2 - 4} = \infty$$

Potrebbe esistere l'asintoto obliquo della forma $y = mx + q$ ma:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

Infatti: (nota: Ti ricordo che dividere una funzione per x vuol dire moltiplicare per x i termini al denominatore)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^3 - 4x} = \infty = m$$

Quindi m non e' definita e non esiste l'asintoto obliquo.

E' piu' semplice dire che non puo' esistere l'asintoto obliquo perche' il numeratore supera di piu' di un grado il denominatore.

$$3) y = \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} \quad \text{Soluzione:}$$

Trovare l'equazione degli asintoti per la funzione:

$$y = \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x}$$

Il campo di esistenza e' l'insieme di tutti i valori reali eccetto i valori $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$ per cui si annulla il denominatore:

$$\text{C.E.} = (-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +2[\cup]+2, +\infty)$$

Calcolo i limiti nei punti di discontinuita':

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} = \frac{31}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +2} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} = \frac{31}{0} = \infty$$

Quindi le rette:

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 2$$

sono tre asintoti verticali.

Per tracciare al meglio l'andamento della funzione vicino agli asintoti calcoliamo i limiti destro e sinistro della funzione nei punti di ascissa -2 , 0 e $+2$

I. Per x tendente a -2 :

▪ Limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} =$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' piccolo di -2 (ad esempio $-2,1$) e fare il conto dei segni:

$$\frac{(-2,1)^5 - 1}{(-2,1)^3 - 4 \cdot (-2,1)}$$

Il numeratore e' negativo come il denominatore quindi l'espressione e' positiva cioe':

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} = +\infty$$

▪ Limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} =$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' grande di -2 (ad esempio $-1,9$) e fare il conto dei segni:

$$\frac{(-1,9)^5 - 1}{(-1,9)^3 - 4 \cdot (-1,9)}$$

$$\frac{(-1,9)^5 - 1}{(-1,9)^3 - 4 \cdot (-1,9)}$$

Il numeratore e' negativo mentre il denominatore e' positivo (4 e' maggiore di $1,9$ al quadrato) quindi l'espressione e' negativa cioe':

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} = -\infty$$

Quindi il risultato e' quello della figura qui sotto:



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \quad x = -2 \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

II. Per x tendente a 0

▪ Limite sinistro:

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} =$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' piccolo di 0 (ad esempio $-0,1$) e fare il conto dei segni:

$$\frac{(-0,1)^5 - 1}{(-0,1)^3 - 4 \cdot (-0,1)}$$

$$\frac{(-0,1)^5 - 1}{(-0,1)^3 - 4 \cdot (-0,1)}$$

Il numeratore e' negativo mentre il denominatore e' positivo quindi l'espressione e' negativa cioe':

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} = -\infty$$

▪ Limite destro:

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} =$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' grande di 0 (ad esempio $+0,1$) e fare il conto dei segni:

$$\frac{(0,1)^5 - 1}{(0,1)^3 - 4 \cdot (0,1)}$$

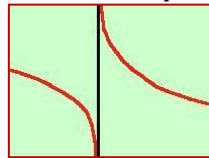
$$\frac{(0,1)^5 - 1}{(0,1)^3 - 4 \cdot (0,1)}$$

Il numeratore e' negativo come pure il denominatore, quindi l'espressione e' positiva cioe':

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} = +\infty$$

Il risultato e' quello della figura qui sotto:



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

III. Per x tendente a $+2$

▪ Limite sinistro:

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +2^-} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} =$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu'

piccolo di 2 (ad esempio 1,9) e fare il conto dei segni:

$$(1,9)^5 - 1$$

$$(1,9)^3 - 4 \cdot (1,9)$$

Il numeratore e' positivo mentre il denominatore e' negativo quindi l'espressione e' negativa cioe':

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} = -\infty$$

▪ Limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} =$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' grande di 2 (ad esempio 2,1) e fare il conto dei segni:

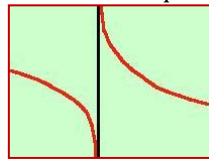
$$(2,1)^5 - 1$$

$$(2,1)^3 - 4 \cdot (2,1)$$

Il numeratore e' positivo come il denominatore quindi l'espressione e' positiva cioe':

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 4x} = +\infty$$

Il risultato e' quello della figura qui sotto:



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad x=2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Per quanto riguarda l'asintoto orizzontale od obliquo possiamo dire che:

- non esiste l'asintoto orizzontale perche' il limite per x tendente ad infinito vale infinito (se non sei convinto ripassa le [forme indeterminate](#));
- non puo' esistere l'asintoto obliquo perche' il numeratore supera di piu' di un grado il denominatore (vedi l'ultima parte dell' [esercizio precedente](#)).

$$4) y = \frac{x^5}{x^3 - x^2 - 9x + 9} \quad \text{soluzione:}$$

$$5) y = \frac{x^5}{x^3 - 7x + 6} \quad \text{soluzione:}$$

$$6) y = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{soluzione:}$$

$$7) y = \frac{2x^2}{x^2 + 4} \quad \text{Soluzione:}$$

Trovare l'equazione degli asintoti per la funzione;

$$y = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$$

Il campo di esistenza e' l'insieme di tutti i valori reali; infatti il denominatore non si annulla (somma di quadrati):

$$\text{C.E.} = (-\infty, +\infty)$$

Per quanto riguarda l'asintoto orizzontale od obliquo facciamo il limite per x tendente ad infinito della funzione :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4} = 2$$

Puoi calcolare semplicemente questo limite mediante il [confronto](#) di infiniti.

Abbiamo quindi solo l'asintoto orizzontale:

$$y = 2$$

$$8) \ y = \frac{x^3}{x^2 + 4} \quad \text{soluzione:}$$

$$9) \ y = \frac{7x^4}{x^2 + 4} \quad \text{soluzione:}$$

$$10) \ y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{soluzione:}$$

$$11) \ y = \frac{x^2}{x^3 - 7x + 6} \quad \text{soluzione:}$$

$$12) \ y = \frac{x^4 - 1}{x^3 - x^2 - 9x + 9} \quad \text{soluzione:}$$

$$13) \ y = \frac{x}{\log x} \quad \text{Soluzione:}$$

Trovare l'equazione degli asintoti per la funzione

$$y = \frac{x}{\log x}$$

Il campo di esistenza e' l'insieme dei valori in cui e' definita la funzione logaritmo ($x > 0$) togliendo inoltre il valore $x=1$ per cui si annulla il denominatore:

$$\text{C.E.} =] 0, 1[\cup] 1, +\infty)$$

Calcolo il limite nell'estremo del campo di esistenza:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\log x} = 0$$

La funzione inizia dal punto $O(0,0)$.

Calcolo ora il limite nel punto di discontinuita':

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\log x} = \frac{1}{0} = \infty$$

Quindi la retta:

$$x = 1$$

e' un asintoto verticale.

Per tracciare al meglio l'andamento della funzione vicino all'asintoto calcoliamo il limite destro e sinistro della funzione nel punto di ascissa 1.

Limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\log x} = \frac{+}{-} = -\infty$$

Limite destro:

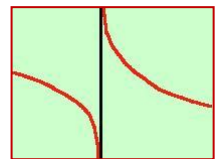
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\log x} = \frac{+}{+} = +\infty$$

Per calcolare limiti di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' piccolo di 1 (ad esempio 0,9) nel primo ed un valore un po' piu' grande di 1 (ad esempio 1,1) nel secondo; ricordando poi che il logaritmo e' negativo per x minore di 1 ed e' positivo per x maggiore di 1, basta fare il conto dei segni.

Quindi il risultato e' quello della figura a destra.

Per quanto riguarda l'asintoto orizzontale od obliquo facciamo il limite per x tendente a piu' infinito della funzione (solo piu' infinito perche' per valori inferiori a zero la funzione non esiste):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty$$



Questo limite e' particolarmente semplice calcolato con la [regola di De l'Hôpital](#).

Puo' esistere l'asintoto obliquo nella forma $y = mx + q$, naturalmente se esistono m e q vediamo se esiste m moltiplicando il denominatore per x :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \log x} = \frac{1}{\log x} = 0$$

Se $m=0$ l'asintoto obliquo non esiste in quanto $m=0$ implica l'asintoto orizzontale, ma siccome il limite della funzione vale infinito, non possiamo avere l'asintoto orizzontale; comunque se procediamo troviamo che q vale infinito.

Non abbiamo asintoti orizzontali ne' obliqui.

14) $y = \frac{e^x}{\log x}$ Soluzione:

Trovare le equazioni degli asintoti per la funzione:

$$y = \frac{e^x}{\log x}$$

Il campo di esistenza e' l'insieme dei valori in cui e' definita la funzione logaritmo ($x > 0$) togliendo inoltre il valore $x=1$ per cui si annulla il denominatore.

C.E. = $] 0, 1[\cup] 1, +\infty)$

Calcolo il limite nell'estremo del campo di esistenza:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\log x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

La funzione inizia dal punto $O(0,0)$

Calcolo ora il limite nel punto di discontinuita':

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{\log x} = \frac{e}{0} = \infty$$

Quindi la retta:

$$x = 1$$

e' un asintoto verticale.

Per tracciare al meglio l'andamento della funzione vicino all'asintoto calcoliamo il limite destro e sinistro della funzione nel punto di ascissa 1:

Limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{\log x} = \frac{+}{-} = -\infty$$

Limite destro:

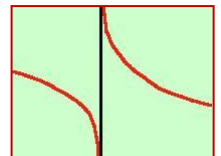
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{\log x} = \frac{+}{+} = +\infty$$

Per calcolare limiti di questo genere basta ricordare che e^x e' sempre positiva mentre il logaritmo e' negativo per x minore di 1 ed e' positivo per x maggiore di 1, bisogna poi fare il conto dei segni.

Quindi il risultato e' quello della figura a destra.

Per quanto riguarda l'asintoto orizzontale od obliquo facciamo il limite per x tendente a piu' infinito della funzione (solo piu' infinito perche' per valori inferiori a zero la funzione non esiste):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\log x} = +\infty$$



Questo limite e' particolarmente semplice calcolato con la [regola di De l'Hôpital](#).

Puo' esistere l'asintoto obliquo nella forma $y = mx + q$, naturalmente se esistono m e q vediamo se esiste m moltiplicando il denominatore per x :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x \log x} = \infty$$

Per calcolare questo limite con il [confronto](#) di infiniti basta ricordare che e^x e' l'infinito di ordine superiore a tutti gli altri.

Non abbiamo asintoti orizzontali ne' obliqui.

$$15) y = \frac{\log x}{e^x}$$

Soluzione:

Trovare le equazioni degli asintoti per la funzione:

$$\log x$$

$$y = \frac{\log x}{e^x}$$

Il campo di esistenza e' l'insieme dei valori in cui e' definita la funzione logaritmo ($x > 0$):

$$\text{C.E.} =] 0, +\infty)$$

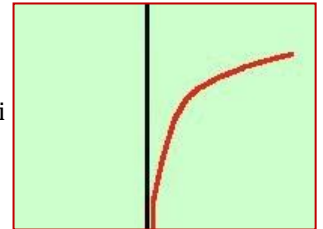
Calcolo il limite nell'estremo del campo di esistenza:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{e^x} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

Abbiamo che la retta $x = 0$ e' un'asintoto verticale e la funzione inizia da $-\infty$ come vadi dalla figura qui a lato.

Per quanto riguarda l'asintoto orizzontale od obliquo facciamo il limite per x tendente a piu' infinito della funzione (solo piu' infinito perche' per valori inferiori a zero la funzione non esiste):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{e^x} = 0$$



Per calcolare questo limite con il **confronto** di infiniti basta ricordare che e^x e' l'infinito di ordine superiore a tutti gli altri.

Abbiamo quindi l'asintoto orizzontale che coincide con l'asse delle x :

$$y = 0$$

G. Studio di funzione

Lo studio di funzione e' un po' il punto di convergenza di tutto il programma di analisi nelle scuole superiori, infatti per poterlo fare vanno applicati tutti i concetti fin qui studiati. Inoltre per parecchi ordini di scuola e' l'argomento che si sa presente sicuramente nell'esame di stato.

Mentre al Liceo Scientifico viene preferito lo studio completo di funzione in altre scuole si sceglie di affrontare uno studio piu' intuitivo ed immediato: qui presentero' entrambe i metodi:

- [Studio intuitivo di funzione](#)
- [Studio completo di funzione](#)

4. Studio intuitivo di funzione

Lo studio intuitivo di funzione si basa sulla conoscenza di alcuni tipi di funzione e sulle operazioni che possiamo fare su di esse: prima di passare all'ultimo punto conviene fare un ripasso dei principali argomenti che potranno esserci utili.

- [Grafici dei principali tipi di funzione](#)
- [Funzioni pari](#)
- [Funzioni dispari](#)
- [Funzioni periodiche](#)
- [Funzioni inverse](#)
- [Funzioni con moduli](#)
- [Esempi di studio intuitivo di funzione](#)

a) Grafici dei principali tipi di funzione

Le funzioni qui di seguito saranno considerate solo dal punto di vista della loro rappresentazione grafica, le spiegazioni e le dimostrazioni relative saranno trattate nella Geometria Cartesiana.

(1) Grafico della retta

La retta si può presentare nella forma:

$$y = mx + q \quad (\text{forma esplicita})$$

Per tracciarla basta trovare due suoi punti (per due punti passa una sola retta).

Esempio:

$$y = 2x + 6$$

scelgo 2 valori per x a caso (ad esempio 0 e 2):

$$\text{- per } x = 0 \text{ segue } y = 2 \cdot 0 + 6 = 6$$

$$\text{- per } x = 2 \text{ segue } y = 2 \cdot 2 + 6 = 10$$

disegno nel piano i due punti $A(0, 6)$ $B(2, 10)$ e ne traccio la congiungente.

Sarebbe preferibile cercare dei punti non a caso ma seguendo un certo ragionamento: ad esempio si potrebbero trovare i punti dove la retta taglia gli assi (basta sostituire una volta $x=0$ e poi $y=0$); oppure, siccome se i punti sono troppo vicini non riesco a disegnare bene la retta, scegliere per x due valori abbastanza lontani fra loro; inoltre cercherò di scegliere dei valori in modo che nei risultati non mi vengano frazioni che mi complicherebbero i calcoli.

Se la retta fosse nella forma:

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{forma implicita})$$

la esplicito ricavandone la y .

Esempio:

$$2x + 3y + 6 = 0$$

$$3y = -2x - 6$$

$$y = -2/3 x - 6/3$$

$$y = -2/3 x - 2$$

poi per x scelgo due valori che eliminino la frazione, ad esempio 0 e 3:

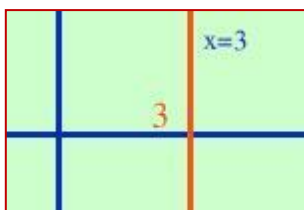
$$\text{- per } x = 0 \text{ segue } y = -2/3 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$\text{- per } x = 3 \text{ segue } y = -2/3 \cdot 3 - 2 = -2 - 2 = -4$$

disegno nel piano i due punti $A(0, -2)$ $B(3, -4)$ e ne traccio la congiungente.

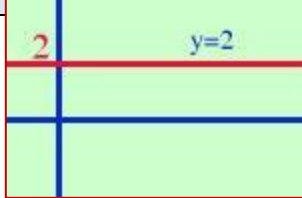
La retta potrebbe anche essere nella forma $x = \text{numero}$; in tal caso si tratta di una retta verticale che passa il punto $A(0, \text{numero})$.

Oppure nella forma $y = \text{numero}$; in tal caso si tratta di una retta orizzontale che passa il punto $A(\text{numero}, 0)$.



Esempio: $x = 3$ e' la retta in cui tutte le x hanno valore 3

$y = 2$ e' la retta in cui tutte le y hanno valore 2

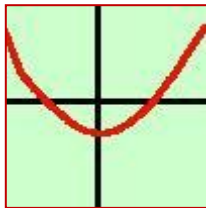
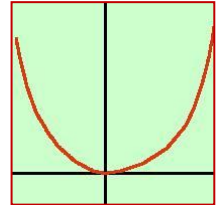


(2) Grafico di una parabola

La parabola si puo' presentare nella forma:

$$y = ax^2$$

Per tracciarla basta ricordare che si tratta della parabola con vertice nell'origine e con concavita' (come nella figura) verso l'alto se $a > 0$, altrimenti la concavita' e' verso il basso.



Se invece e' nella forma $y = ax^2 + c$ allora e' come la precedente ma il vertice e' spostato sulla verticale della quantita' c dall'origine (nella figura a fianco c e' negativo).

Per la forma piu' generale:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Invece, conviene seguire questo metodo:

1. trovare le coordinate del vertice
2. trovare (se esistono) le intersezioni con l'asse x
3. trovare l' intersezione con l'asse delle y
4. unire in un grafico i punti trovati.

Se vuoi vedere un **semplice esempio**, eccolo:

Disegnare il grafico della parabola:

$$y = x^2 + 2x - 8$$

Seguiamo questo schema:

1. trovare le coordinate del vertice
2. trovare (se esistono) le intersezioni con l'asse x
3. trovare l' intersezione con l'asse delle y
4. unire in un grafico i punti trovati

1. Trovare le coordinate del vertice.

Per trovare le coordinate V_x e V_y posso applicare le formule:

$$V_x = - \frac{b}{2a}$$

$$V_y = - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Sapendo che nel nostro caso $a=1$ $b=2$ $c = -8$:

$$V_x = - \frac{2}{2 \cdot 1} = -1$$

$$V_y = - \frac{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}{4 \cdot 1} = - \frac{4 + 32}{4} = -9$$

Poiche' il secondo calcolo puo' facilmente portare a degli errori, ai miei alunni ho insegnato a trovare solo la x e poi sostituirla nell'equazione per trovare la y. Sostituisco -1 ad x nell'equazione di partenza:

$$y = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$$

Un altro sistema e' fare la derivata prima e porla uguale a zero: infatti il vertice per la parabola e' sempre un punto di massimo o di minimo:

$$y' = 2x + 2$$

$$y' = 0$$

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$2x/2 = -2/2$$

$$x = -1$$

Poi sostituisco -1 alla x nella funzione di partenza per trovare la y (come sopra) Il vertice ha coordinate V(-1,-9)

2. Trovare (se esistono) le intersezioni con l'asse x.

Possono anche non esistere cioe' la parabola puo' essere o tutta sopra o tutta sotto l'asse delle x, in tal caso si disegna senza intersezioni.

Per trovare le intersezioni devo fare il sistema fra la parabola e l'asse delle x (equazione y=0):

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 8 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = x^2 + 2x - 8 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ogni uguaglianza puo' essere letta a rovescio:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Con la **formula ridotta** risultava molto piu' semplice:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Ho due soluzioni :

la prima:

$$\begin{cases} x_1 = (-2 - 6)/2 = -4 \\ y = 0 \end{cases}$$

la seconda:

$$\begin{cases} x_2 = (-2 + 6)/2 = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

I due punti di intersezione con l'asse delle x sono A(-4,0) B(2,0)

3. Trovare l' intersezione con l'asse delle y.

Basta fare il sistema fra la parabola e l'asse delle y (equazione x=0):

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 8 \\ x = 0 \end{cases}$$

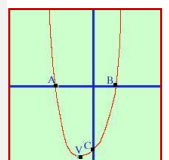
Sostituisco:

$$y = 0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = 0$$

$$x = 0$$

Il punto di intersezione con l'asse y e' C(0,-8).

In generale il punto di intersezione con l'asse y di una funzione $y=f(x)$ ha come primo valore zero e come secondo valore il termine noto della funzione **perche'**? Vedi oltre.



4. Unire in un grafico i punti trovati.

Puoi vedere qui a fianco il risultato (un po' sbilenco, la figura dovrebbe essere simmetrica e io dovrei comprarmi una tavoletta grafica).

Perché? Ecco:

Per trovare l'intersezione con l'asse delle y facciamo il sistema fra la funzione e l'equazione dell'asse y ($x=0$) quindi al posto di x mettiamo tutti zero; allora gli unici termini che non diventano zero sono la y e il termine noto; esempio:

$$\begin{cases} y = 6x^3 + 2x^2 - 8x + 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

diventa:

$$\begin{cases} y = 6 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

il punto di intersezione vale $P(0,4)$ e 4 e' il termine noto della funzione quindi se prendo ad esempio la funzione

$$y = 8x^5 + 2x^3 - 8x + 1$$

so subito che taglia l'asse y nel punto $(0,1)$

La forma:

$$y = ax^2 + bx$$

puoi trattarla come la formula completa ricordando che l'intersezione con l'asse delle y ed una delle intersezioni con l'asse x sono entrambe nell'origine degli assi.

Regola generale: quando una funzione non ha il termine noto significa che passa per l'origine degli assi

Sapresti dire perche'?

Se in una funzione che non ha il termine noto, sostituisco le coordinate dell'origine $O(0,0)$ sia ad x che ad y, la funzione diventera' $0=0$ cioe', essendo l'uguaglianza vera, la funzione passa per l'origine.

Esempio: se prendo la funzione

$$y = 6x^6 + 5x^4 - 8x^2$$

essa passa per l'origine $O(0,0)$.

(3) Grafico dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi

L'equazione dell'iperbole e':

$$xy = k \quad \text{con } k \text{ costante.}$$

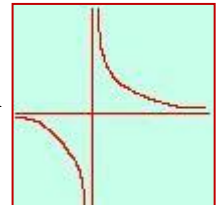
A noi interessa nella forma equivalente:

$$y = k/x$$

E' una funzione che ha un asintoto verticale coincidente con l'asse delle y ed un asintoto orizzontale coincidente con l'asse delle x.

Per disegnarla intuitivamente basta ricordarsi che passa sempre per i punti $A(1,k)$ e $B(k,1)$.

Si parte da un asintoto, si raggiungono i punti A e B, poi si tende verso l'altro asintoto.



(4) Grafico della funzione logaritmica

Dobbiamo distinguere due casi:

- la base del logaritmo e' maggiore di uno
- la base del logaritmo e' compresa fra zero ed uno (in senso lato, cioe' senza gli estremi).

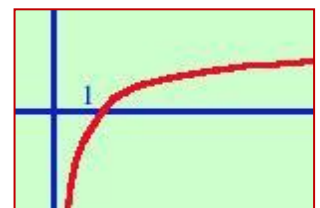
La base del logaritmo e' maggiore di uno:

allora, qualunque sia la base,

$$y = \log x$$

ha le seguenti caratteristiche:

- la funzione e' sempre crescente
- e' definita solo per valori positivi della x
- ha un asintoto verticale nell'asse y in cui la curva tende a $-\infty$
- il punto $1,0$ e' sempre di intersezione fra la curva e l'asse delle x
- all'aumentare delle x oltre il punto 1 la curva cresce molto lentamente.

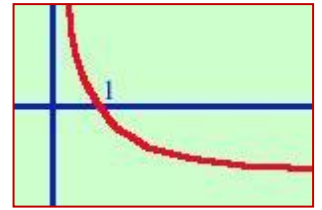


La base del logaritmo e' minore di 1 e maggiore di 0.
Allora, qualunque sia la base in questo intervallo:

$$y = \log x$$

ha le seguenti caratteristiche:

- la funzione e' sempre decrescente
- e' definita solo per valori positivi della x
- ha un asintoto verticale nell'asse y in cui la curva tende a $+\infty$
- il punto 1,0 e' sempre di intersezione fra la curva e l'asse delle x
- all'aumentare delle x oltre il punto 1 la curva diminuisce molto lentamente



Il caso della base minore di zero e' un caso trattato molto raramente, in quanto di solito si lavora con logaritmi a base e; pero' e' sempre meglio essere previdenti...

(5) Grafico della funzione esponenziale

La funzione:

$$y = e^x$$

ha le seguenti caratteristiche:

- la funzione e' sempre crescente
- e' sempre positiva
- ha un asintoto orizzontale nell'asse x in cui la curva tende a $-\infty$
- il punto 0,1 e' di intersezione fra la curva e l'asse delle y
- all'aumentare delle x oltre il punto 1 la curva cresce molto rapidamente



Non c'e' troppo da meravigliarsi se alcune caratteristiche assomigliano o sono opposte a quelle del logaritmo: le due curve sono una **inversa dell'altra**.

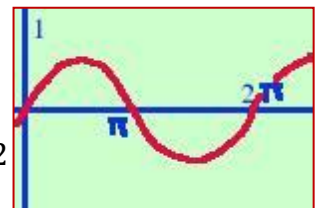
(6) Grafico della funzione seno

Per disegnare la funzione:

$$y = \sin x$$

occorre sull'asse delle x usare i multipli ed i sottomultipli di π ricordando che $\pi = 3,14$ unita' del piano. La funzione ha le seguenti caratteristiche:

- la funzione e' periodica di periodo 2π
- passa per l'origine
- Taglia l'asse delle x nel punto $(\pi, 0)$
- e' crescente da 0 a $\pi/2$ in cui vale 1 poi decrescente fino a $3/2\pi$ in cui vale -1 poi torna a crescere fino a 2π ove vale 0
- e' sempre compresa nella striscia di piano tra $y=1$ e $y=-1$



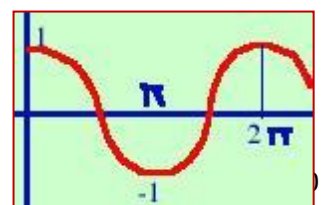
(7) Grafico della funzione coseno

Per disegnare la funzione

$$y = \cos x$$

occorre sull'asse delle x usare i multipli ed i sottomultipli di π ricordando che $\pi = 3,14$ unita' del piano. La funzione ha le seguenti caratteristiche:

- la funzione e' periodica di periodo 2π
- all'origine vale 1
- Taglia l'asse delle x nei punti $(\pi/2, 0)$ e $(3/2\pi, 0)$



- e' decrescente da 0 a π in cui vale -1 poi crescente fino a 2π in cui torna a valere 1
- e' sempre compresa nella striscia di piano tra $y=1$ e $y=-1$

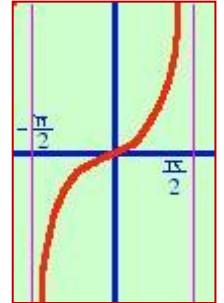
(8) Grafico della funzione tangente

Per disegnare la funzione:

$$y = \text{tang } x$$

occorre sull'asse delle x usare i multipli ed i sottomultipli di π ricordando che $\pi = 3,14$ unita' del piano. La funzione ha le seguenti caratteristiche:

- la funzione e' periodica di periodo π
- passa per l'origine in cui ha un flesso orizzontale crescente
- ha per asintoti le rette $x = -\pi/2$ ove tende a $-\infty$ e $x = \pi/2$ ove tende a $+\infty$
- e' sempre crescente.



(9) Funzione radice

Consideriamo solo il caso delle radici quadrate:

distinguiamo due sottocasi:

1. sotto radice abbiamo un polinomio di primo grado
2. sotto la radice abbiamo un polinomio di secondo grado

1) Sotto radice abbiamo un polinomio di primo grado.

Si tratta di una parabola rovesciata con asse sull'asse delle x, in tal caso basta considerare solamente il ramo superiore della parabola stessa.

Facciamo un esempio, consideriamo:

$$y = \sqrt{(x + 1)}$$

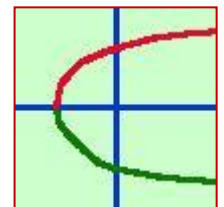
Se elevassi al quadrato da entrambe le parti otterrei:

$$y^2 = x + 1$$

cioe' la parabola riferita all'asse x (io preferisco dire rovesciata anche se e' un termine non usato; e' comunque la parabola che ottieni scambiando la x con la y nell'equazione normale).

$$x = y^2 - 1$$

Nella figura a fianco devi considerare solo il ramo rosso della parabola perche' la radice si suppone positiva.



2) Sotto la radice abbiamo un polinomio di secondo grado.

si tratta di una circonferenza con centro sull'asse delle x, in tal caso basta considerare solamente la parte superiore della circonferenza stessa.

Facciamo un semplice esempio; consideriamo:

$$y = \sqrt{(1 - x^2)}$$

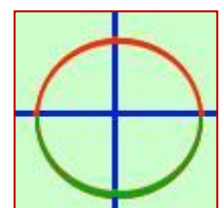
Se elevassi al quadrato da entrambe le parti otterrei:

$$y^2 = 1 - x^2$$

cioe' la circonferenza di centro l'origine e raggio 1:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Nella figura a fianco devi considerare solo il ramo rosso della circonferenza perche' la radice si suppone positiva.



Se il polinomio sotto radice e' di grado superiore a due, a seconda del tipo di polinomio puo' essere conveniente estrarre di radice oppure fare lo studio completo di funzione: devi decidere caso per caso.

b) Funzioni pari

Una funzione si dice pari se cambiando di segno la x la funzione non cambia di segno in formula:

$$f(-x) = f(x)$$

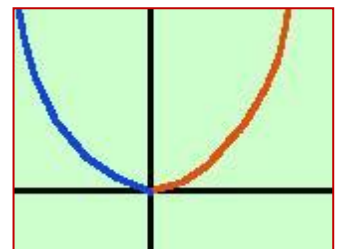
In pratica significa che una funzione pari e' simmetrica rispetto all'asse y , cioè i valori a destra dell'origine sono uguali a quelli a sinistra.

Un esempio semplice di funzione pari e' dato da:

$$y = x^2$$

Infatti il quadrato mi rende positivo il risultato sia che alla x sostituisca un numero positivo che negativo.

Per le funzioni pari bastera' costruire solo meta' grafico poi farne il simmetrico rispetto all'asse delle y (simmetria assiale). In pratica lo ribalto attorno all'asse y . In blu la parte ribaltata.



c) Funzioni dispari

Una funzione si dice dispari se cambiando di segno la x anche la funzione cambia di segno in formula:

$$f(-x) = -f(x)$$

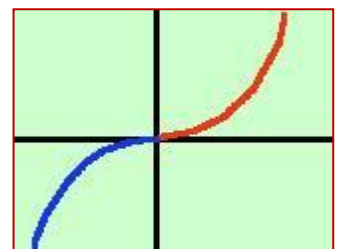
In pratica significa che una funzione dispari e' simmetrica rispetto all'origine, cioè i valori a destra dell'origine sono uguali a quelli a sinistra cambiati di segno.

Un esempio semplice di funzione dispari e' dato da:

$$y = x^3$$

Infatti il cubo mi rende positivo il risultato se alla x sostituisco un numero positivo e negativo quando alla x sostituisco un valore negativo.

Anche per le funzioni dispari bastera' costruire solo meta' grafico poi farne il simmetrico rispetto all'origine (simmetria centrale). In pratica lo ribalto prima attorno all'asse y e poi attorno all'asse x . In blu la parte ribaltata due volte.



d) Funzioni periodiche

Una funzione si dice periodica se dopo un certo intervallo (periodo) si ripete.

In formula:

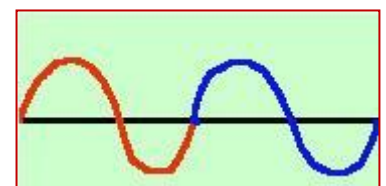
$$f(x+h) = f(x)$$

con h periodo.

Un esempio semplice di funzione periodica e' dato da:

$$y = \sin x$$

Se alla x sostituisco un numero oppure lo stesso numero



aumentato di 2π ottengo lo stesso valore.

Le funzioni trigonometriche sono generalmente periodiche.

Per le funzioni periodiche bastera' costruire il grafico solo per un periodo poi ripeterlo sia a destra che a sinistra finche' non riempio lo spazio destinato al grafico. In blu la parte ripetuta una volta.

e) Grafici di funzioni inverse

Una funzione si dice inversa di un'altra se si puo' ottenere la seconda funzione scambiando fra loro la x e la y e ricavando poi la y nella prima funzione.

Esempio.

Considerata la funzione:

$$y = e^x$$

per trovarne l'inversa scambio y con x :

$$x = e^y$$

Poi devo ricavare la y , siccome e e' ad un esponente con e applico il logaritmo naturale a destra ed a sinistra dell'uguale:

$$\log x = \log (e^y)$$

logaritmo ed esponenziale si elidono:

$$\log x = y$$

$$y = \log x$$

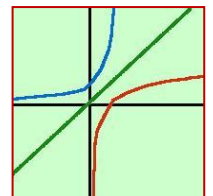
Quindi la funzione inversa di $y = e^x$ e' $y = \log x$ intendendo con $\log x$ il logaritmo naturale di x .

Quando abbiamo due funzioni una inversa dell'altra il grafico della seconda si puo' ottenere dal grafico della prima ribaltandolo attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Nell'esempio:

in blu la funzione $y = e^x$

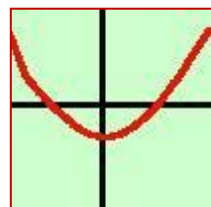
in rosso la sua inversa $y = \log x$

ed in verde la bisettrice $y = x$ del primo e terzo quadrante.



f) Funzioni con moduli

Quando una funzione e' contenuta in un modulo per disegnarla basta disegnare la funzione senza modulo poi riportare sopra l'asse delle x la parte che si trova sotto l'asse.



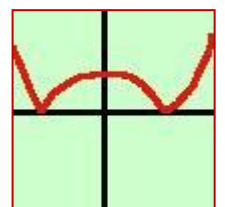
Per esempio, consideriamo la funzione:

$$y = |x^2 - 1|$$

Prima disegno il grafico della funzione:

$$y = x^2 - 1$$

Poi rovescio la parte che si trova sotto l'asse delle x portandola sopra l'asse (simmetria assiale rispetto all'asse



x).

g) Esempi di studio intuitivo di funzione

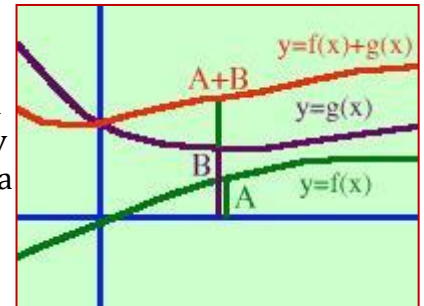
Vediamo ora alcuni semplici esempi di studio intuitivo del grafico di una funzione. Lo studio intuitivo e' conveniente quando posso suddividere la funzione in funzioni piu' semplici di cui io conosca il grafico.

Se ad esempio devo studiare la funzione:

$$y = f(x) + g(x)$$

se conosco i grafici di $y = f(x)$ e di $y = g(x)$, bastera' che sulla verticale punto per punto io faccia la somma algebrica delle y delle due funzioni componenti (come puoi vedere dalla figura il punto indicato da A+B e' la somma delle ordinate A e B delle due funzioni di partenza).

Per il prodotto od il quoziente il calcolo sara' un pochino piu' complicato ma il metodo e' sempre quello.



Con $\log x$ intendiamo il logaritmo naturale di x. Ecco alcuni esempi:

1) $y = x + |\log x|$ **Svolgimento:**

Disegnare approssimativamente il grafico per la funzione:

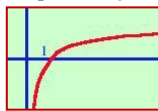
$$y = x + |\log x|$$

intanto c'e' da dire che il campo di esistenza per la funzione e' individuato dal fatto di esservi tra le funzioni il logaritmo, quindi dovra' essere:

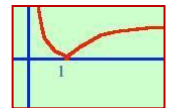
$$\text{C.E. } \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Scompongo la funzione; posso considerarla somma di due funzioni.

La prima: $y = x$ bisettrice del primo e terzo quadrante



La seconda: $y = |\log x|$

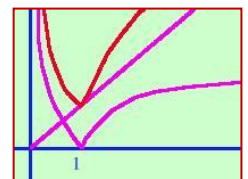


Per trovare il grafico di quest'ultima funzione posso considerare il grafico di $y = \log x$ e poi applicarvi il modulo, cioe' ribalto le parti negative attorno all'asse x.

Ora la mia funzione di partenza sara' la somma delle funzioni parziali, cioe' bastera' che punto per punto intuitivamente io faccia la somma dei valori che hanno le y delle due funzioni parziali.

In viola le due funzioni componenti.

In rosso la loro funzione somma.

2) $y = x^2 - e^x$ **Svolgimento:**

Disegnare approssimativamente il grafico per la funzione:

$$y = x^2 - e^x$$

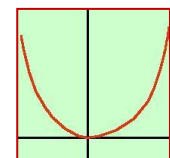
Il campo di esistenza e' tutto l'asse reale: **C.E. } $\{x \in \mathbb{R}\}$**

Scompongo la funzione; posso considerarla differenza di due funzioni.

La prima: $y = x^2$ parabola con vertice nell'origine.



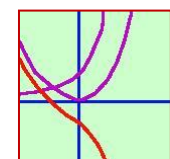
La seconda: $y = e^x$ e' la funzione esponenziale.



Ora la mia funzione di partenza sara' la differenza delle funzioni parziali, cioe' bastera' che punto per punto intuitivamente io faccia la differenza dei valori che hanno le y delle due funzioni parziali.

In viola le due funzioni componenti.

In rosso la loro funzione differenza.



3) $y = x \sin x$ **Svolgimento:**

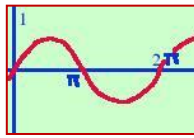
Disegnare approssimativamente il grafico per la funzione:

$y = x \sin x$

Il campo di esistenza e' tutto l'asse reale: C.E. $\{x \in \mathbb{R}\}$.

Scompongo la funzione: posso considerarla prodotto di due funzioni.

La prima: $y = x$ e' la bisettrice del primo e terzo quadrante



La seconda: $y = \sin x$ e' la sinusoidale.

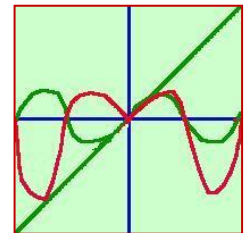
Ora la mia funzione di partenza sara' il prodotto delle funzioni parziali: $y = x \cdot \sin x$ cioe' bastera' che punto per punto intuitivamente io faccia il prodotto dei valori che hanno le ordinate delle due funzioni parziali.

In verde le due funzioni componenti.

In rosso la loro funzione prodotto.

Si potrebbe anche dire che la funzione $y = x \sin x$ e' una funzione pari perche' e' il prodotto di due funzioni dispari (meno per meno da' piu').

Sapresti **dimostrare** che il prodotto di due funzioni dispari e' una funzione pari? Ecco la dimostrazione:



Dimostriamo che il prodotto di due funzioni dispari e' una funzione pari.

Sia $y = f(x)$ una funzione dispari cioe' $f(-x) = -f(x)$

Sia $y = g(x)$ un'altra funzione dispari cioe' $g(-x) = -g(x)$

Voglio dimostrare che la funzione $y = f(x) \cdot g(x)$ e' una funzione pari cioe'

$f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x)$

Considero $f(-x) \cdot g(-x)$

essendo $f(x)$ dispari $f(-x) = -f(x)$

essendo $g(x)$ dispari $g(-x) = -g(x)$

Quindi

$f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x)$

come volevamo.

Le funzioni pari e dispari si comportano come i segni + e -; potresti anche dimostrare che:

- una funzione pari per una funzione dispari e' una funzione dispari

- una funzione pari per una funzione pari e' una funzione pari.

4) $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$

Svolgimento:

Disegnare approssimativamente il grafico per la funzione:

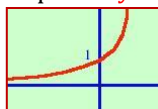
$y = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$

Il campo di esistenza per la funzione e' individuato dal fatto di esservi tra le funzioni la radice, quindi dovra' essere:

C.E. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Scompongo la funzione: posso considerarla quoziente di due funzioni.

La prima: $y = \sqrt{x}$ e' la funzione radice.



La seconda: $y = e^x$ e' la funzione esponenziale.



Ora la mia funzione di partenza sara' il quoziente delle funzioni parziali, cioe' bastera' che punto per punto intuitivamente io faccia il quoziente dei valori che hanno le ordinate delle due funzioni parziali.

In verde le due funzioni componenti.

In rosso la loro funzione quoziente.



5) $y = e^{-|x|}$ **Svolgimento:**

Disegnare approssimativamente il grafico per la funzione:

$$y = e^{-|x|}$$

Il campo di esistenza e' tutto l'asse reale:

$$\text{C.E. } \{x \in \mathbb{R}\}$$

Inoltre la funzione e' pari:

$$e^{-|x|} = e^{-|x|}$$

Quindi bastera' disegnarne solo una parte poi ribalteremo il grafico attorno all'asse y.

Partiamo dal grafico della funzione esponenziale.

Se fosse da considerare:

$$y = e^{|x|}$$



allora dovrei considerare la parte di grafico con le x positive cioe' dall'origine in avanti; invece la mia funzione:

$$y = e^{-|x|}$$

avra' sempre l'esponente negativo, quindi sara' la parte che si trova prima dell'origine.

h) Esempio di funzione con diversa forma matematica al variare del dominio

Talvolta le funzioni si presentano in forma algebrica diversa a seconda del dominio su cui sono definite. Tali tipi di funzione servono per meglio imprimersi i concetti di continuita' e derivabilita' e quindi vengono molto usate soprattutto in ambito teorico.

Per studiarle dobbiamo restringere ogni funzione solo alla parte di piano in cui e' definita la sua forma algebrica e quindi, con un operazione di "ricucitura" ricostruire il dominio di tutta la funzione.

Vediamo su un esempio come affrontare lo studio di una funzione di tale tipo.

Disegnare intuitivamente il grafico della funzione:

$$y = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ e^x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e dire se essa e' continua e derivabile.

Per disegnare il grafico della funzione disegniamo il grafico della prima parte:

$$y = x + 1$$

e consideriamolo solo nel semipiano $x < 0$ (scartiamo la parte in grigio).



Disegniamo poi il grafico della seconda parte:

$$y = e^x$$

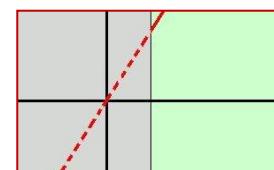
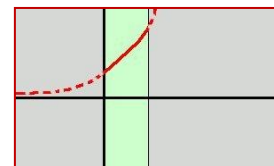
e consideriamolo nella striscia $0 \leq x \leq 1$ (scartiamo la parte in grigio).

Infine disegniamo la terza parte

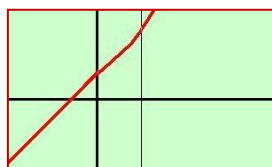
$$y = e^x$$

e consideriamola nel semipiano $x > 1$

(cioe' scartiamo la parte in grigio).



Adesso "ricucio" assieme le tre parti ed ottengo il grafico completo:



Considero il grafico della funzione.

Per studiarne la continuita' e la derivabilita' devo vedere cosa succede nei punti di congiunzione, cioe' per $x=0$ ed $x=1$.

Per **definizione di continuita'** dovra' essere:

- nel punto 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x+1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x$$

e sostituendo 0 alla x ottengo $1=1$; quindi la funzione e' continua in 0

- nel punto 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^x = \lim_{x \rightarrow 1^+} ex$$

e sostituendo 1 alla x ottengo $e = e$; quindi la funzione e' continua in 1;

Quindi la funzione e' continua su tutto \mathbb{R} .

Consideriamo la derivata della funzione (bastera' **derivare** ogni componente):

$$y' = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ ex & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ e & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- Deriviamo la prima parte:

$$y = x + 1$$

$$y' = 1$$

- Deriviamo la seconda parte:

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

- Deriviamo la terza parte:

$$y = ex$$

$$y' = e$$

e controlliamo cosa succede in 0 ed 1

Per definizione di derivabilita' dovra' essere la derivata destra uguale alla derivata sinistra nel punto cioe':

- nel punto 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1$$

quindi la funzione e' derivabile in 0.

- nel punto 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^x = e^1 = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e = e$$

quindi la funzione e' derivabile in 1

Quindi la funzione e' derivabile su tutto \mathbb{R}

Risultato: la funzione e' continua e derivabile su tutto \mathbb{R} .

5. Studio completo di funzione

Lo studio completo di una funzione si puo' sintetizzare nei seguenti punti:

- **Determinazione del Campo di esistenza**
- **Determinazione del tipo di funzione**
- **Intersezione con gli assi**
- **Valori agli estremi del campo di esistenza**
- **Positivita' e negativita'**
- **Determinazione degli asintoti**
- **Determinazione della derivata prima**
- **Crescenza e decrescenza**
- **Determinazione dei Massimi e minimi**

- Determinazione della derivata seconda
- Determinazione della concavità, convessità e flessi
- Determinazione di eventuali ulteriori punti appartenenti alla funzione
- Grafico della funzione
- Qualche esempio di studio completo di funzione

Intendiamoci: questo studio è sovrabbondante, di solito non si fanno tutti i punti. Sta all'alunno determinare quali di questi punti bisogna trattare per poter costruire il grafico in modo ottimale.

a) Determinazione del Campo di esistenza

Si definisce *campo di esistenza di una funzione* l'insieme dei valori che posso attribuire alla variabile indipendente x per ottenere il valore della y .

In pratica il campo di esistenza di una funzione coincide con tutto l'asse x in tutte le funzioni eccetto nei tre casi seguenti:

- Funzioni fratte
devo porre il denominatore diverso da zero
- Funzioni irrazionali
il termine sotto radice deve essere maggiore o uguale a zero
- Funzioni logaritmiche
l'argomento del logaritmo deve essere maggiore di zero

Naturalmente posso cumulare gli effetti ed aver ad esempio una funzione logaritmica fratta:

Qui occorre notare che per eseguire bene gli esercizi è necessaria una buona conoscenza delle disequazioni. Per polinomi di grado superiore al secondo non altrimenti scomponibili poi serve anche la scomposizione di Ruffini.

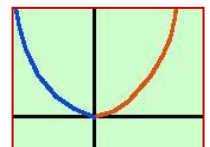
b) Determinazione del tipo di funzione

Veramente la determinazione del tipo di funzione (intera, razionale, fratta,..) deve essere fatta all'inizio prima della determinazione del campo di esistenza.

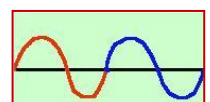
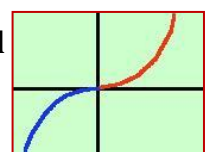
Qui consideriamo alcuni tipi di funzione che ci aiutano a costruire il loro grafico e precisamente:

- le funzioni pari
- le funzioni dispari
- le funzioni periodiche

- Per le funzioni pari basterà costruire solo metà grafico poi farne il simmetrico rispetto all'asse delle y (simmetria assiale). In pratica lo ribalto attorno all'asse y . In blu la parte ribaltata.



- Per le funzioni dispari basterà costruire solo metà grafico poi farne il simmetrico rispetto all'origine (simmetria centrale). In pratica primo lo ribalto rispetto all'asse y ed il risultato lo ribalto ancora attorno all'asse x . In blu la parte ribaltata due volte.



- Per le funzioni periodiche bastera' costruire un periodo e poi ripeterlo su tutto l'asse reale. in blu il periodo ripetuto una prima volta.

c) Punti di intersezione con gli assi

Si tratta di calcolare le coordinate dei punti in cui la funzione incontra gli assi coordinati.

Per fare cio' occorre fare:

- il sistema tra la funzione e l'asse delle x ($y=0$)
 - il sistema tra la funzione e l'asse delle y ($x=0$)
- Quest'ultimo valore corrisponde sempre al termine noto

Da notare che se in una funzione non trascendente $y=f(x)$ manca il termine noto, allora la funzione **passa per l'origine** :

Infatti se in una funzione senza termine noto sostituisco sia ad y che ad x il valore zero tutti i termini si annullano e ottengo $0=0$.

Attenzione pero': la funzione non deve essere trascendente; ad esempio le funzioni

$$y=e^x \quad y=\log x \quad y = \cos x$$

anche se non hanno termine noto non passano per l'origine.

Trascendente significa che non e' ottenibile mediante le operazioni elementari sulle variabili: somma, differenza prodotto e quoziente .

Ad esempio le seguenti funzioni passano per l'origine:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

$$y = 4x^4 - 12x^2 + 4x$$

$$x^3 + 3y^2 - 6xy - 8y = 0$$

Esempio:

Considero la funzione:

$$y = x^2 - 4$$

Cerco le intersezioni con gli assi.

Faccio il sistema tra la funzione e l'asse delle x:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ho due punti di intersezione con l'asse delle x:

$$A(-2, 0) \quad B(2, 0)$$

Faccio il sistema tra la funzione e l'asse delle y:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

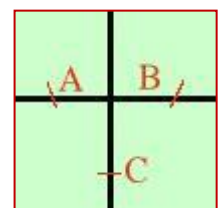
Poiche' ad x sostituisco zero la y sara' sempre uguale al termine noto:

$$\begin{cases} y = -4 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse y e' :

$$C(0, -4)$$

sul grafico a destra sono riportati i punti di intersezione



d) Valori agli estremi del campo di esistenza

Quando il campo di esistenza e' diverso da tutto \mathbb{R} meno qualche punto e vi sono delle zone della retta reale in cui la funzione non e' definita, e' bene andare a controllare qual'e' il valore della funzione nei punti che separano queste zone. Attenzione pero' che devi fare il limite solo dalla parte dove la funzione e' definita.

Esempio. Considero la funzione:

$$y = x \log x$$

Il campo di esistenza e' dato da $x > 0$

Devo vedere cosa succede nel punto $x=0$

Pero' dovrò fare solo il limite destro perche' la funzione e' definita solamente a destra di 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x =$$

il limite e' del tipo $0 \cdot \infty$ per calcolarlo trasformo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} =$$

Applico la regola di De l'Hospital:

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1/x \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

Quindi il grafico della funzione iniziera' nell'origine (0,0).

e) Positivita' e negativita'

Serve per individuare in quali parti del piano passera' il grafico della funzione.

Si deve porre la funzione maggiore di zero e trovare per quali valori di x e' verificata: per tali valori il grafico sara' sopra l'asse delle ascisse mentre per valori diversi sara' sotto.

Vediamo un semplice esempio.

Considero la funzione:

$$y = x^2 - 4$$

Pongo:

$$x^2 - 4 > 0$$

Considero l'equazione associata:

$$x^2 - 4 = 0$$

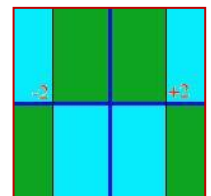
che ha soluzioni:

$$x = -2 \quad \text{e} \quad x = +2$$

Avendo due soluzioni reali e distinte, la disequazione sara' verificata per valori esterni alle radici cioe':

$$(-\infty, -2) \cup (+2, +\infty)$$

Quindi posso individuare le aree in cui si trovera' la funzione (in verde scuro ho indicato dove non passa la funzione mentre in azzurro chiaro ho indicato dove passa).



f) Determinazione degli asintoti

Determinare gli asintoti serve per veder come la funzione si comporta all'infinito.

Per la teoria si rimanda al [capitolo specifico](#)

Prima conviene calcolare gli asintoti verticali facendo tendere la x verso i punti di discontinuita' della funzione; se il valore del limite vale infinito esiste l'asintoto verticale ed allora conviene anche calcolare il limite destro e sinistro nei punti.

Si passa poi a determinare, se esistono, gli asintoti orizzontali od obliqui facendo il limite della funzione per x tendente ad infinito.

g) Determinazione della derivata prima

Si calcola la derivata prima per poter poi individuare la crescita e la decrescita della funzione ed anche i massimi ed i minimi.

Per la trattazione si rimanda al [capitolo specifico](#).

h) Crescita e decrescita

Fatta la derivata della funzione, la si pone maggiore di zero. Nell'intervallo dove la disequazione è verificata avremo che la funzione è crescente, mentre dove non è verificata la funzione sarà decrescente.

Esempio:

Data la funzione:

$$y = x^2 - 4$$

la derivata è:

$$y' = 2x$$

Pongo:

$$2x > 0$$

che ha soluzione:

$$x > 0$$

Quindi da meno infinito fino a zero avremo che la funzione sarà decrescente (cioè il suo grafico va dall'alto verso il basso), mentre per $x > 0$ la funzione sarà crescente (il grafico andrà dal basso verso l'alto).

Per una trattazione più approfondita si rimanda al [capitolo specifico](#).

i) Determinazione dei Massimi e minimi

Se si utilizza il metodo dello studio della derivata prima ora si possono determinare i massimi e i minimi della funzione.

Se invece usi il metodo della derivata seconda prima dovrai calcolarla.

Dovrai scegliere tu, caso per caso, qual'è il metodo migliore da utilizzare.

Per la trattazione si rimanda al [capitolo specifico](#).

j) Determinazione della derivata seconda

Si calcola la derivata seconda per poter poi individuare la concavità o la convessità della funzione ed anche i punti di flesso.

k) Determinazione della concavità, convessità e flessi

Ponendo la derivata seconda maggiore di zero e risolvendo la disequazione avremo gli intervalli in cui la funzione rivolge la concavità verso l'alto ed inoltre troveremo i punti dove cambia di concavità (cioè i punti di flesso).

Per la trattazione si rimanda all' [argomento specifico](#).

l) Determinazione di eventuali ulteriori punti appartenenti alla funzione

Per individuare dei punti ove non si sa di preciso come si comporti la funzione basta sostituire dei valori alla x e calcolare i valori corrispondenti per la y , otterremo così delle coordinate di punti per cui passa la funzione.

Questo è solito un calcolo che viene saltato perché i punti già trattati riescono ad individuare in modo abbastanza preciso il grafico di una funzione. Comunque può essere utile per alcune funzioni particolari.

m) Grafico della funzione

Si tratta ora di impostare un grafico in cui mettere tutti i dati trovati sviluppando i vari punti e quindi unirli con una linea.

L'unica cosa cui fare attenzione è l'uso di una opportuna unità di misura, che permetta di avere un grafico abbastanza ampio ma anche che permetta di vederne i particolari; anche qui devi decidere caso per caso.

n) Qualche esempio di studio completo di funzione

Vediamo ora alcuni esercizi sullo studio di una funzione

Studiare e rappresentare con un grafico opportuno le seguenti funzioni

1) $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ Svolgimento:

Studiare la funzione:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

Per questa come per le altre funzioni cercheremo di utilizzare il maggior numero possibile di punti dello studio.

1. Determinazione del Campo di esistenza

Il campo di esistenza è tutto l'asse reale:

$$C.E. \{x \in \mathbb{R}\}$$

2. Determinazione del tipo di funzione

È una funzione di tipo polinomiale.

Non è né pari né dispari né periodica.

3. Intersezione con gli assi

Faccio il sistema tra la funzione e l'asse delle x :

$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione di terzo grado **scompongo** il polinomio associato:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$$

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Un prodotto è zero quando uno dei fattori è zero quindi pongo ognuno dei fattori uguali a zero:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ prima soluzione}$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ seconda soluzione}$$

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ terza soluzione}$$

Ho tre punti di intersezione con l'asse delle x:

$$A(-2, 0) \quad B(1, 0) \quad C(2, 0)$$

Faccio il sistema tra la funzione e l'asse delle y:

$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ad x sostituisco zero quindi la y sarà uguale al termine noto:

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse y è:

$$D(0, 4)$$

4. Valori agli estremi del campo di esistenza

Essendo il campo di esistenza tutto R questo punto potrebbe essere saltato, comunque, per completezza, vediamo i valori a meno infinito e a più infinito:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 - 4x + 4) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 - 4x + 4) = +\infty$

Quindi la funzione inizia a sinistra da meno infinito e sparisce a destra a più infinito.

5. Positività e negatività

Dobbiamo trovare i valori per cui la funzione è maggiore di zero:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$$

Sostituisco alla funzione la scomposizione trovata prima:

$$(x - 1)(x - 2)(x + 2) > 0$$

Faccio il sistema:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \\ x > -2 \end{cases}$$

Faccio lo schema:

$$\begin{array}{l} x > 1 \quad \text{----- (1) + + + + + + + + + + +} \\ x > 2 \quad \text{----- (2) + + + + + +} \\ x > -2 \quad \text{---- (-2) + + + + + + + + + + + + + + +} \end{array}$$

$$f(x) > 0 \quad \text{---- (-2) + + + + + (1) ----- (2) + + + + + +}$$

Da $-\infty$ a -2 la funzione è negativa.

Tra -2 ed 1 la funzione è positiva.

Tra 1 e 2 la funzione è negativa.

Da 2 a $+\infty$ la funzione è positiva.

Nello schema a fianco ho segnato in verde scuro le zone che non contengono la funzione.



6. Determinazione degli asintoti

Non esistono asintoti verticali perché la funzione non ha punti di discontinuità (il campo di esistenza è tutto R).

Non esistono asintoti orizzontali perché per x tendente all'infinito la funzione tende ad infinito.

Non esistono asintoti obliqui perché la funzione è di terzo grado e quindi non può essere approssimata mediante una retta.

7. Determinazione della derivata prima

Faccio la derivata di:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

$$y' = 3x^2 - 2x - 4$$

8. Crescenza e decrescenza

Pongo la derivata prima maggiore di zero per trovare le zone ove la funzione è crescente:

$$3x^2 - 2x - 4 > 0$$

Equazione associata:

$$3x^2 - 2x - 4 = 0$$

risolvo (formula ridotta)

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{[(-1)^2 - 3(-4)]}}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

I valori sono:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{3}$$

Non preoccupatevi; è normale che vengano delle radici quindi non pensate di aver sbagliato i calcoli.

Il valore approssimato sarà $x_1 = -0,8$ $x_2 = 1,2$.

Essendo il Delta maggiore di zero la disequazione sarà verificata per valori esterni all'intervallo delle radici cioè:

- per valori da $-\infty$ ad x_1 la funzione è crescente
- per valori da x_1 ad x_2 la funzione è decrescente
- per valori da x_2 a $+\infty$ la funzione è ancora crescente.

Se osservate bene il risultato trovato corrisponde a quanto trovato con la positività della funzione, infatti nello studio di funzione i dati sono correlati e se sbagliate qualcosa ve ne accorgete subito, il problema però è capire dove si è sbagliato.

9. Determinazione dei Massimi e minimi

- siccome per valori da meno infinito ad x_1 la funzione è crescente e per valori da x_1 ad x_2 la funzione è decrescente allora in x_1 abbiamo un punto di massimo
- siccome per valori da x_1 ad x_2 la funzione è decrescente e per valori da x_2 a più infinito la funzione è ancora crescente allora x_2 è un punto di minimo

Ora bisogna fornirsi di pazienza e calcolare le coordinate del punto di massimo e del punto di minimo. Il risultato è:

Coordinate del Massimo:

- $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$ valore approssimato circa - 0,8

- $y = \frac{70 + 26\sqrt{13}}{27}$ valore approssimato circa 6,1

Coordinate del minimo:

- $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{3}$ valore approssimato circa + 1,5

- $y = \frac{70 - 26\sqrt{13}}{27}$ valore approssimato circa - 0,9

Se vuoi vedere i calcoli; ecco i calcoli:

Dobbiamo trovare le coordinate del massimo e del minimo:

Massimo

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 4 =$$

Devo sostituire ad x la coordinata trovata:

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$$

Per motivi di rappresentazione sullo schermo faccio il calcolo a parte per x^3 ed x^2

$$\bullet \quad x^3 = \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{3} \right]^3 =$$

al numeratore devo fare il **cubo di un binomio**

$$= \frac{1 - 3\sqrt{13} + 3(\sqrt{13})^2 - (\sqrt{13})^3}{27} =$$

$$= \frac{1 - 3\sqrt{13} + 39 - 13\sqrt{13}}{27} =$$

$$= \frac{40 - 16\sqrt{13}}{27}$$

$$\bullet \quad x^2 = \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{3} \right]^2 =$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{13} + (\sqrt{13})^2}{9} =$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{13} + 13}{9} =$$

$$= \frac{14 - 2\sqrt{13}}{9}$$

Ora eseguo il calcolo completo:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 4 =$$

$$= \frac{40 - 16\sqrt{13}}{27} - \frac{14 - 2\sqrt{13}}{9} - 4 \frac{1 - \sqrt{13}}{3} + 4 =$$

$$= \frac{40 - 16\sqrt{13}}{27} - \frac{14 - 2\sqrt{13}}{9} - \frac{4 - 4\sqrt{13}}{3} + 4 =$$

minimo comune multiplo 27:

$$= \frac{40 - 16\sqrt{13} - 42 + 6\sqrt{13} - 36 + 36\sqrt{13} + 108}{27} =$$

$$= \frac{70 + 26\sqrt{13}}{27}$$

Coordinate del Massimo:

$$\bullet \quad x = \frac{1 - \sqrt{13}}{3} \quad \text{valore approssimato circa } -0,8$$

$$\bullet \quad y = \frac{70 + 26\sqrt{13}}{27} \quad \text{valore approssimato circa } 6,1$$

minimo:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 4 =$$

Devo sostituire ad x la coordinata trovata:

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{3}$$

nche qui, per motivi di rappresentazione sullo schermo, faccio il calcolo a parte per x^3 ed x^2 :

$$x^3 = \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{3} \right]^3 =$$

Al numeratore devo fare il cubo di un binomio:

$$\begin{aligned} & 1 + 3\sqrt{13} + 3(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^3 \\ &= \frac{\quad}{27} = \\ & 1 + 3\sqrt{13} + 39 + 13\sqrt{13} \\ &= \frac{\quad}{27} = \\ & 40 + 16\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet & x^2 = \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{3} \right]^2 = \\ & \frac{1 + 2\sqrt{13} + (\sqrt{13})^2}{9} = \\ & \frac{1 + 2\sqrt{13} + 13}{9} = \\ & \frac{14 + 2\sqrt{13}}{9} \end{aligned}$$

Ora eseguo il calcolo completo:

$$\begin{aligned} y &= x^3 - x^2 - 4x + 4 = \\ &= \frac{40 + 16\sqrt{13}}{27} - \frac{14 + 2\sqrt{13}}{9} - 4 \cdot \frac{1 + \sqrt{13}}{3} + 4 = \\ &= \frac{40 + 16\sqrt{13}}{27} - \frac{14 + 2\sqrt{13}}{9} - \frac{4 + 4\sqrt{13}}{3} + 4 = \end{aligned}$$

minimo comune multiplo 27:

$$\begin{aligned} &= \frac{40 + 16\sqrt{13} - 42 - 6\sqrt{13} - 36 - 36\sqrt{13} + 108}{27} = \\ &= \frac{70 - 26\sqrt{13}}{27} \end{aligned}$$

Coordinate del minimo:

$$\begin{aligned} \bullet & x = \frac{1 + \sqrt{13}}{3} \text{ valore approssimato circa } +1,5 \\ \bullet & y = \frac{70 - 26\sqrt{13}}{27} \text{ valore approssimato circa } -0,9 \end{aligned}$$

10. Determinazione della derivata seconda

Partiamo dalla derivata prima:

$$y' = 3x^2 - 2x - 4$$

$$y'' = 6x - 2$$

11. Determinazione della concavità, convessità e flessi

Pongo la derivata seconda maggiore di zero;

- dove la disequazione è verificata avrò la concavità verso l'alto
- dove la disequazione non è verificata avrò la concavità verso il basso
- dove la curva cambia di concavità avrò un flesso:

$$y'' = 6x - 2 > 0$$

$$6x > 2$$

$$x > 2/6$$

$$x > 1/3$$

Quindi:

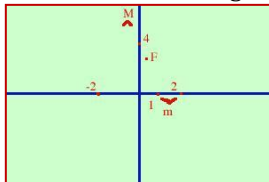
- per $x > 1/3$ la concavità è verso l'alto
- per $x < 1/3$ la concavità è verso il basso
- in $x = 1/3$ avremo il flesso $F(1/3, 70/27)$

12. Determinazione di eventuali ulteriori punti appartenenti alla funzione

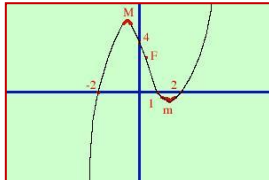
Non ci servono punti aggiuntivi.

13. Grafico della funzione

Ora mettiamo in un grafico tutti i dati trovati.



Poi partendo da meno infinito congiungo i punti con una riga continua (nera).



$$2) y = \frac{x+2}{x^2-1} \quad \text{Svolgimento:}$$

Studiare la funzione:

$$y = \frac{x+2}{x^2-1}$$

1. Determinazione del Campo di esistenza

Essendo una funzione fratta il **campo di esistenza** è dato dai valori che rendono il denominatore diverso da zero:

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

$$\text{C.E. } \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$$

Il campo di esistenza è dato da tutti i valori reali diversi da -1 e da +1

2. Determinazione del tipo di funzione

È una funzione fratta

Non è né pari né dispari né periodica

3. Intersezione con gli assi

Per trovare il punto di intersezione con l'asse delle x faccio il sistema tra la funzione e l'asse delle x:

$$\begin{cases} y = \frac{x+2}{x^2-1} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x^2-1} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Una frazione è zero se il numeratore vale zero quindi:

$$\begin{cases} x+2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse x vale:

$$A = (-2, 0)$$

Trovo ora il punto di intersezione fra la funzione e l'asse y:

$$\begin{cases} y = \frac{x+2}{x^2-1} \\ x = 0 \end{cases}$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse y vale:

$$B = (0, -2)$$

4. Valori agli estremi del campo di esistenza

Essendo il campo di esistenza tutto \mathbb{R} eccetto i valori -1 e $+1$ questa ricerca puo' essere saltata perche' sara' compresa nella ricerca degli asintoti.

5. Positivita' e negativita'

Dobbiamo trovare i valori per cui la funzione e' maggiore di zero:

$$\begin{aligned} x + 2 \\ \text{-----} > 0 \\ x^2 - 1 \end{aligned}$$

E' una frazione, per essere positiva numeratore e denominatore devono avere segni concordi:

$$\text{NUM } x + 2 \geq 0$$

$$\text{DEN } x^2 - 1 > 0$$

Il denominatore e' un'equazione di secondo grado e sara' positivo per valori esterni all'intervallo delle radici.

Risolvendo:

$$\text{NUM } x \geq -2$$

$$\text{DEN } x < -1 \vee x > 1$$

Faccio lo schema:

$$\begin{array}{l} x > -2 \quad \text{-----} (-2) \text{++++++} \\ x < -1 \vee x > 1 \quad \text{++++++} (-1) \text{-----} (+1) \text{++++++} \\ f(x) > 0 \quad \text{-----} (-2) \text{++++} (-1) \text{-----} (+1) \text{++++++} \end{array}$$

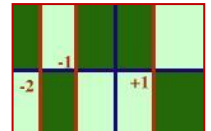
Da $-\infty$ a -2 la funzione e' negativa

Tra -2 e -1 la funzione e' positiva

Tra -1 e $+1$ la funzione e' negativa

Da $+1$ a $+\infty$ la funzione e' positiva

Nello schema a fianco ho segnato in verde scuro le zone che non contengono la funzione.



6. Determinazione degli asintoti

Ricerca degli asintoti verticali

(generalmente esistono quando si hanno punti di discontinuita')

- o Primo punto di discontinuita' $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{-1+2}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Quindi la retta:

$$x = -1$$

e' un asintoto verticale.

Per tracciarlo al meglio calcoliamo i limiti destro e sinistro della funzione nel punto -1

- Limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+2}{x^2-1}$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' piccolo di -1 (ad esempio $-1,1$) e fare il conto dei segni:

$$\frac{-1,1 + 2}{\text{-----}} > 0$$

$$\frac{(-1,1)^2 - 1}{\text{-----}}$$

Il numeratore e il denominatore sono entrambi positivi quindi l'espressione e' positiva cioe':

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = +\infty$$

- Limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' grande di -1 (ad esempio -0,9) e fare il conto dei segni:

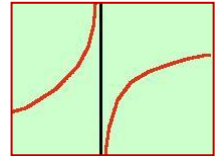
$$\frac{-0,9 + 2}{\text{-----}} < 0$$

$$\frac{(-0,9)^2 - 1}{\text{-----}}$$

Il numeratore e' positivo mentre il denominatore e' negativo quindi l'espressione e' negativa cioe':

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = -\infty$$

Quindi il risultato e' quello della figura a fianco.



- Secondo punto di discontinuita' x = +1

$$\lim_{x \rightarrow +1} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(+1+2)}{(1-1)} = \frac{3}{0} = \infty$$

Quindi la retta:

$$x = 1$$

e' un asintoto verticale.

Per tracciarlo al meglio calcoliamo i limiti destro e sinistro della funzione nel punto 1

- Limite sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow +1^-} \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' piccolo di 1 (ad esempio 0,9) e fare il conto dei segni:

$$\frac{0,9 + 2}{\text{-----}} > 0$$

$$\frac{(0,9)^2 - 1}{\text{-----}}$$

Il numeratore e' positivo mentre il denominatore e' negativo quindi l'espressione e' negativa cioe':

$$\lim_{x \rightarrow +1^-} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = -\infty$$

- Limite destro:

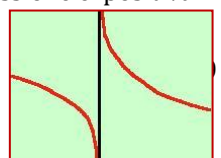
$$\lim_{x \rightarrow +1^+} \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

- Per calcolare un limite di questo genere basta sostituire alla x un valore un pochino piu' grande di 1 (ad esempio 1,1) e fare il conto dei segni:

$$\frac{1,1 + 2}{\text{-----}} < 0$$

$$\frac{(1,1)^2 - 1}{\text{-----}}$$

Sia il numeratore che il denominatore sono positivi quindi l'espressione e' positiva cioe':



$$\lim_{x \rightarrow +1^+} \frac{x+2}{x^2-1} = +\infty$$

Quindi il risultato e' quello della figura a fianco.

Vediamo ora la ricerca dell' asintoto orizzontale od obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2-1} = 0$$

Il numeratore ha **potenza inferiore** rispetto al denominatore, quindi va all'infinito piu' lentamente; quindi, quando sopra e' ancora un numero, sotto e' gia' infinito e numero diviso infinito vale zero asintoto orizzontale $y=0$.

In un liceo in cui ho insegnato vi era anche l'uso di determinare per l'asintoto orizzontale se la funzione si trovi sopra o sotto l'asintoto stesso.

Penso che questo sia sovrabbondante, comunque se vuoi vedere **un esempio**.

7. Determinazione della derivata prima

Faccio la derivata di:

$$y = \frac{x+2}{x^2-1}$$

E' la derivata di un **quoziente**:

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2-1) - (x+2) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

Eseguendo i calcoli:

$$y' = \frac{-x^2 - 4x - 1}{(x^2-1)^2}$$

1. Crescenza e decrescenza

Pongo la derivata prima maggiore di zero per trovare le zone ove la funzione e' crescente:

$$\frac{-x^2 - 4x - 1}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

E' una frazione, per essere positiva numeratore e denominatore devono avere segni concordi. Il denominatore, essendo un quadrato sara' sempre positivo.

Il numeratore e' un'espressione di secondo grado, considero l'equazione associata:

$$-x^2 - 4x - 1 = 0$$

Cambio di segno:

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

Risolvo (**formula ridotta**)

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 1}}{1}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

I valori sono:

$$x_1 = -2 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = -2 + \sqrt{3}$$

Il valore approssimato sara' $x_1 = -3,7$ $x_2 = -0,3$.

Essendo il Delta maggiore di zero ed il primo coefficiente minore di zero, la disequazione sara' verificata per valori interni all'intervallo delle radici cioe':

- per valori da meno infinito ad x_1 la funzione e' negativa
- per valori da x_1 ad x_2 la funzione e' positiva
- per valori da x_2 a piu' infinito la funzione e' ancora negativa.

Facciamo lo schema:

$$\text{NUM } -2 - \sqrt{3} \leq x \leq -2 + \sqrt{3}$$

DEN sempre positivo

Riporto su un grafico:

$$\text{NUM} \geq 0 \quad \text{-----} (-2-\sqrt{3}) \text{++++++ (-}2+\sqrt{3})\text{-----}$$

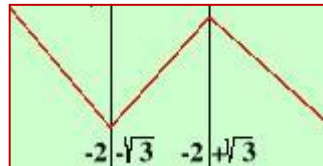
$$\text{DEN} > 0 \quad \text{++++++}$$

$$f(x) > 0 \quad \text{-----} (-2-\sqrt{3}) \text{++++++ (-}2+\sqrt{3})\text{-----}$$

- per valori da meno infinito a $-2-\sqrt{3}$ la funzione e' decrescente

- per valori da $-2-\sqrt{3}$ a $-2+\sqrt{3}$ la funzione e' crescente

- per valori da $-2+\sqrt{3}$ a piu' infinito la funzione e' ancora decrescente.



2. Determinazione dei Massimi e minimi

Senza troppi discorsi se guardi la figura precedente vedi subito che $-2-\sqrt{3}$ e' un minimo e $-2+\sqrt{3}$ e' un massimo, se invece vogliamo fare le cose precise facciamo i seguenti ragionamenti:

- o siccome per valori da meno infinito a $-2-\sqrt{3}$ la funzione e' decrescente e per valori da $-2-\sqrt{3}$ a $-2+\sqrt{3}$ la funzione e' crescente allora in $-2-\sqrt{3}$ abbiamo un punto di minimo
- o siccome per valori da $-2-\sqrt{3}$ a $-2+\sqrt{3}$ la funzione e' crescente e per valori da $-2+\sqrt{3}$ a piu' infinito la funzione e' decrescente allora $-2+\sqrt{3}$ e' un punto di massimo.

Ora bisogna fornirsi di pazienza e calcolare le coordinate del punto di massimo e del punto di minimo. Il risultato e'

Coordinate del minimo:

- o $x = -2 - \sqrt{3}$ valore approssimato circa -3,7
- o $y = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$ valore approssimato circa 0,15

Coordinate del Massimo:

- o $x = -2 + \sqrt{3}$ valore approssimato circa -0,3
- o $y = \frac{-2-\sqrt{3}}{2}$ valore approssimato circa -1,8

Se vuoi vedere i calcoli, eccoli:

Dobbiamo trovare le coordinate del massimo e del minimo:

minimo

$$y = \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$y = \frac{-2-\sqrt{3}+2}{(-2-\sqrt{3})^2-1}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{4+3+4\sqrt{3}-1}$$

Devo sostituire ad x la coordinata trovata:

$$x = -2 - \sqrt{3}$$

$$y = \frac{-2-\sqrt{3}+2}{(-2-\sqrt{3})^2-1}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{4+3+4\sqrt{3}-1}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$$

Eseguo i calcoli:

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$$

Razionalizzo:

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} \cdot \frac{6 - 4\sqrt{3}}{6 - 4\sqrt{3}}$$

Al denominatore e' un prodotto notevole, al numeratore multiplico normalmente:

$$y = \frac{-6\sqrt{3} + 12}{36 - 48}$$

Divido per sei sopra e sotto:

$$y = \frac{-\sqrt{3} + 2}{-2}$$

Cambio di segno sopra e sotto:

$$y = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$$

Coordinate del minimo :

- $x = -2 - \sqrt{3}$ valore approssimato circa -3,7

- $y = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$ valore approssimato circa 0,15

Massimo:

$$y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

Devo sostituire ad x la coordinata trovata:

$$x = -2 + \sqrt{3}$$

$$y = \frac{-2 + \sqrt{3} + 2}{(-2 + \sqrt{3})^2 - 1}$$

Eseguo i calcoli:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4 + 3 - 4\sqrt{3} - 1}$$

$$y = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Razionalizzo:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{6 - 4\sqrt{3}} \cdot \frac{6 + 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}}$$

Al denominatore e' un prodotto notevole, al numeratore multiplico normalmente:

$$y = \frac{6\sqrt{3} + 12}{36 - 48}$$

Sommo:

$$y = \frac{6\sqrt{3} + 12}{-12}$$

Divido per sei sopra e sotto:

$$y = \frac{\sqrt{3} + 2}{-2}$$

Cambio di segno sopra e sotto:

$$y = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2}$$

Coordinate del Massimo:

- $x = -2 + \sqrt{3}$ valore approssimato circa -0,3

- $y = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2}$ valore approssimato circa -1,8

3. Determinazione della derivata seconda

Come si fa di solito nelle funzioni fratte possiamo trascurare la derivata seconda perche' ormai

abbiamo abbastanza dati con la derivata prima, e quindi possiamo già disegnare la funzione con buona approssimazione.

4. Determinazione della concavità, convessità e flessi

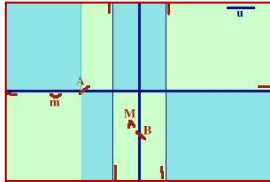
Non avendo fatto la derivata seconda non tratteremo questo punto (si trascurava di solito nelle funzioni razionali fratte perché in queste è abbastanza semplice il metodo dello studio della derivata prima mentre il metodo della derivata seconda solitamente è piuttosto laborioso).

5. Determinazione di eventuali ulteriori punti appartenenti alla funzione

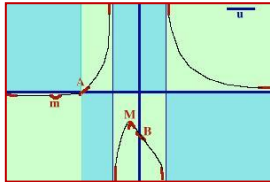
Non ci servono punti aggiuntivi.

6. Grafico della funzione

Ora mettiamo in un grafico tutti i dati trovati



Il minimo è un po' forzato, in effetti con l'unità di misura scelta è vicinissimo all'asse x. Poi partendo da meno infinito congiungo i punti con una riga continua (nera).



Attenzione: gli esercizi seguenti non sono ancora sviluppati: il 3, 4 e 5 sono solo un promemoria per me di sviluppare esercizi di questo tipo. Se provate a risolverli, probabilmente troverete molti risultati frazionari.

$$3) y = \frac{x \log x}{x^2 - 4} \quad \text{svolgimento}$$

$$4) y = \frac{x + 3}{e^x - 1} \quad \text{svolgimento}$$

$$5) y = \frac{2\sin x - 1}{\sin^2 x - \cos^2 x} \quad \text{svolgimento}$$

$$6) y = 1 + \sqrt{(x^2 - 2x + 5)} \quad \text{svolgimento} \quad \text{Maturita' scientifica sperimentale PNI 1993}$$

$$7) y = \frac{x^2}{2} + \log |x+1| \quad \text{svolgimento} \quad \text{Maturita' scientifica 1994}$$

H. Sviluppo in serie

4. Cos'è una serie di funzioni

Una serie di funzioni è una serie i cui termini sono funzioni.

Ricordo che una serie è una successione data dalla somma dei termini di una successione cioè data la successione:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$$

è possibile definire la serie di termini:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \dots, S_n, \dots$$

assegnando ai termini i valori:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

.....

5. Sviluppo di alcune funzioni razionali

Le serie di alcune funzioni razionali erano note già prima del calcolo differenziale; le propongo qui perché oltre che ottimo esercizio mentale, forniscono un meccanismo utile per trattare alcune funzioni razionali. Esempio: considero la funzione razionale:

$$y = \frac{1}{1-x}$$

Sopra tolgo e aggiungo x:

$$y = \frac{1-x+x}{1-x}$$

Ora spezzo la frazione:

$$y = \frac{1-x}{1-x} + \frac{x}{1-x}$$

Semplificando ottengo:

$$y = 1 + \frac{x}{1-x}$$

Ora tolgo e aggiungo x^2 al numeratore della frazione:

$$y = 1 + \frac{x-x^2+x^2}{1-x}$$

Spezzo la frazione:

$$y = 1 + \frac{x - x^2}{1 - x} + \frac{x^2}{1 - x}$$

Metto in evidenza la x nella prima frazione:

$$y = 1 + \frac{x(1-x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-x}$$

Semplifico ed ottengo:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

Ora posso togliere e aggiungere x^3 al numeratore della frazione:

$$y = 1 + x + \frac{x^2 - x^3 + x^3}{1-x}$$

Spezzo la frazione:

$$y = 1 + x + \frac{x^2 - x^3}{1-x} + \frac{x^3}{1-x}$$

Metto in evidenza x^2 nella prima frazione:

$$y = 1 + x + \frac{x^2(1-x)}{1-x} + \frac{x^3}{1-x}$$

Semplifico ed ottengo:

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

Ora posso togliere e aggiungere x^4 al numeratore della frazione

Posso continuare all'infinito ed otterro' per la mia funzione lo sviluppo:

$$y = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \dots\dots\dots$$

Per esercizio sviluppare in serie:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{Soluzione:}$$

Sviluppare in serie la funzione:

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

Sopra aggiungo e tolgo x^2 :

$$y = \frac{1 + x^2 - x^2}{1 + x^2}$$

Ora spezzo la frazione:

$$y = \frac{1 + x^2}{1 + x^2} - \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Semplificando ottengo:

$$y = 1 - \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Ora aggiungo e tolgo x^4 al numeratore della frazione:

$$y = 1 - \frac{x^2 + x^4 - x^4}{1 + x^2}$$

Spezzo la frazione:

(attento al segno della seconda frazione: siccome la frazione e' negativa devo cambiare di segno l'ultimo termine)

$$y = 1 - \frac{x^2 + x^4}{1 + x^2} + \frac{x^4}{1 + x^2}$$

Metto in evidenza x^2 nella prima frazione:

$$y = 1 - \frac{x^2(1+x^2)}{1 + x^2} + \frac{x^4}{1 + x^2}$$

Semplifico ed ottengo:

$$y = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1 + x^2}$$

Ora posso aggiungere e togliere x^6 al numeratore della frazione:

$$y = 1 - x^2 + \frac{x^4 + x^6 - x^6}{1 + x^2}$$

Spezzo la frazione:

$$y = 1 - x^2 + \frac{x^4 + x^6}{1 + x^2} - \frac{x^6}{1 + x^2}$$

Metto in evidenza x^4 nella prima frazione:

$$y = 1 - x^2 + \frac{x^4(1+x^2)}{1 + x^2} - \frac{x^6}{1 + x^2}$$

Semplifico ed ottengo:

$$y = 1 - x^2 + x^4 - \frac{x^6}{1 + x^2}$$

Ora posso togliere e aggiungere x^8 al numeratore della frazione

Posso continuare all'infinito ed otterro' per la mia funzione lo sviluppo

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

6. Significato geometrico delle derivate successive di una funzione

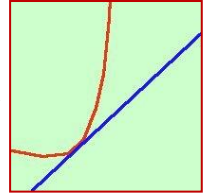
Se considero una funzione e la sua derivata prima abbiamo già visto la [relazione](#):

$$(y - y_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

o meglio:

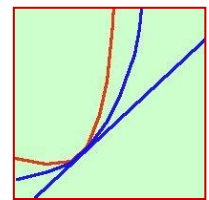
$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

Questo significa che con la derivata prima posso approssimare la curva in un punto con una retta (la tangente).

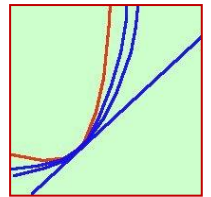


Intuitivamente possiamo dire che la curva e la tangente hanno due punti (coincidenti) comuni.

Se consideriamo oltre la derivata prima anche la derivata seconda, otterremo una curva del secondo ordine (parabola) che ha tre punti comuni con la curva in esame (parabola osculatrice) e quindi otterremo un'approssimazione migliore.



Se consideriamo poi anche la derivata terza otterremo una curva del terzo ordine con quattro punti in comune con la curva in esame (cubica osculatrice) e quindi l'approssimazione migliorera'.



Quindi più derivate successive prendero' meglio approssimerò la curva, e posso procedere fino ad approssimare la curva quanto voglio.

Peccato che il metodo serva solo a livello locale, cioè in un intorno abbastanza ristretto del punto considerato, ma vedremo che darà luogo a parecchie conclusioni interessanti.

7. Introduzione alla formula di Taylor

La formula di Taylor si propone di trasformare una funzione continua e derivabile (almeno di ordine n) in una somma di funzioni polinomiali.

Partiamo dal teorema di [Lagrange](#) applicato alla funzione continua e derivabile $f(x)$ all'interno dell'intervallo $[a, x]$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

che posso anche scrivere come:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$$

C'è da dire che quando x tende ad a , il termine $(x-a)f'(c)$ diventa infinitesimo (e, intuitivamente, posso [scambiare \$c\$ con \$x\$](#) , cioè $f'(x) = f'(c)$). Se la funzione $f'(x)$ nell'intervallo

$[a,x]$ e' continua e derivabile all'interno dell'intervallo, posso ancora applicare il teorema di Lagrange ed ottengo:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

e siccome posso scambiare c ed x:

$$\frac{f(c) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

Che posso anche scrivere come:

$$f(c) = f(a) + (x-a)f'(c)$$

Andando a sostituire nella prima formula ottengo:

$$f(x) = f(a) + (x-a)[f'(a) + (x-a)f'(c)]$$

cioe' eseguendo i calcoli:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2f'(c)$$

Posso ripetere il procedimento se $f''(x)$ e' continua e derivabile ed ottengo:

$$\frac{f''(c) - f''(a)}{x - a} = f'''(c)$$

che posso anche scrivere come:

$$f''(c) = f''(a) + (x-a)f'''(c)$$

Andando a sostituire nella prima formula ottengo:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2[f''(a) + (x-a)f'''(c)]$$

cioe' eseguendo i calcoli:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2f''(a) + (x-a)^3f'''(c)$$

Posso procedere ancora finche' la funzione e' continua e derivabile

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2f''(a) + (x-a)^3f'''(a) + (x-a)^4f^{IV}(c)$$

Il termine con $f^{IV}(c)$ si chiama resto nella forma di Lagrange.

Nel nostro procedimento pero' non abbiamo tenuto conto delle costanti: derivando una costante si ottiene il valore zero.

Per capire quali costanti sono necessarie consideriamo l'espressione trovata: essa deve sempre essere un'uguaglianza.

Se considero $x=a$ ottengo dovro' avere i valori:

- $f(a)$ per la funzione
- $f'(a)$ per la derivata prima
- $f''(a)$ per la derivata seconda
- $f'''(a)$ per la derivata terza
-

cioe' se eseguo questo procedimento per l'ultima espressione considerata ho che per avere l'uguaglianza il termine con $(x-a)^2f''(a)$ dovro' essere fratto 2 perche' altrimenti facendo la derivata seconda non otterrei $f(a)$ ma $2f(a)$.

Similmente il termine con $(x-a)^3f'''(a)$ dovro' essere fratto $3 \cdot 2 = 6$

Se hai bisogno di vedere questi calcoli piu' in particolare, eccoli:

Partiamo dall'espressione (senza considerare il resto)

Quando x tende ad a i termini dopo l'uguale, a parte il primo, sono infinitesimi del primo, secondo, terzo... ordine; quindi posso considerarli come zeri.

Indico in blu i termini o nulli o infinitesimi:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2f''(a) + (x-a)^3f'''(a) + (x-a)^4f^{IV}(a) + \dots$$

Faccio la derivata prima **Calcoli:**

- La derivata di $f(a)$ e' 0 [$f(a)$ e' una costante]
 $f'(a) = 0$
 - La derivata di $(x-a)f'(a)$ e' la derivata di un prodotto fra la variabile $(x-a)$ e la costante $f'(a)$
 $[(x-a)f'(a)]' = 1 \cdot f'(a) + (x-a) \cdot 0 = f'(a)$
 - La derivata di $(x-a)^2f''(a)$ e' la derivata di un prodotto fra $(x-a)^2$ e la costante $f''(a)$
 $[(x-a)^2f''(a)]' = 2(x-a) \cdot f''(a) + (x-a)^2 \cdot 0 = 2(x-a) \cdot f''(a)$
 - La derivata di $(x-a)^3f'''(a)$ e' la derivata di un prodotto fra $(x-a)^3$ e la costante $f'''(a)$
 $[(x-a)^3f'''(a)]' = 3(x-a)^2 \cdot f'''(a) + (x-a)^3 \cdot 0 = 3(x-a)^2 \cdot f'''(a)$
 - La derivata di $(x-a)^4f^{IV}(a)$ e' la derivata di un prodotto fra $(x-a)^4$ e la costante $f^{IV}(a)$
 $[(x-a)^4f^{IV}(a)]' = 4(x-a)^3 \cdot f^{IV}(a) + (x-a)^4 \cdot 0 = 4(x-a)^3 \cdot f^{IV}(a)$
- ottengo quindi
 $f'(x) = 0 + f'(a) + 2(x-a)f''(a) + 3(x-a)^2f'''(a) + 4(x-a)^3f^{IV}(a) + \dots$

$$f'(x) = 0 + f'(a) + 2(x-a)f''(a) + 3(x-a)^2f'''(a) + 4(x-a)^3f^{IV}(a) + \dots$$

Ho quindi $f'(x) = f'(a)$ che e' giusto.

Faccio la derivata seconda **Calcoli :**

- La derivata di 0 e' 0
 $(0)' = 0$
 - La derivata di $f'(a)$ e' 0 [$f'(a)$ e' una costante]
 $[f'(a)]' = 0$
 - La derivata di $2(x-a)f''(a)$ e' la derivata di un prodotto fra la variabile $2(x-a)$ e la costante $f''(a)$
 $[2(x-a)f''(a)]' = 2 \cdot f''(a) + 2(x-a) \cdot 0 = 2f''(a)$
 - La derivata di $3(x-a)^2f'''(a)$ e' la derivata di un prodotto fra $3(x-a)^2$ e la costante $f'''(a)$
 $[3(x-a)^2f'''(a)]' = 6(x-a) \cdot f'''(a) + 3(x-a)^2 \cdot 0 = 6(x-a) \cdot f'''(a)$
 - La derivata di $4(x-a)^3f^{IV}(a)$ e' la derivata di un prodotto fra $4(x-a)^3$ e la costante $f^{IV}(a)$
 $[4(x-a)^3f^{IV}(a)]' = 12(x-a)^2 \cdot f^{IV}(a) + 4(x-a)^3 \cdot 0 = 12(x-a)^2 \cdot f^{IV}(a)$
- ottengo quindi
 $f''(x) = 0 + 0 + 2f''(a) + 6(x-a)f'''(a) + 12(x-a)^2f^{IV}(a) + \dots$

$$f''(x) = 0 + 0 + 2f''(a) + 6(x-a)f'''(a) + 12(x-a)^2f^{IV}(a) + \dots$$

Nella derivata seconda ho $f''(x) = 2f''(a)$ mentre dovrei avere $f''(x) = f''(a)$ quindi perche' sia valida l'uguaglianza il terzo termine dopo l'uguale va diviso per 2.

Faccio la derivata terza **Calcoli :**

- La derivata di 0 e' 0
 $(0)' = 0$
 - La derivata di 0 e' 0
 $(0)' = 0$
 - La derivata di $2f''(a)$ e' 0 [$2f''(a)$ e' una costante]
 $[2f''(a)]' = 0$
 - La derivata di $6(x-a)f'''(a)$ e' la derivata di un prodotto fra la variabile $6(x-a)$ e la costante $f'''(a)$
 $[6(x-a)f'''(a)]' = 6 \cdot f'''(a) + 6(x-a) \cdot 0 = 6f'''(a)$
 - La derivata di $12(x-a)^2f^{IV}(a)$ e' la derivata di un prodotto fra $12(x-a)^2$ e la costante $f^{IV}(a)$
 $[12(x-a)^2f^{IV}(a)]' = 24(x-a) \cdot f^{IV}(a) + 12(x-a)^2 \cdot 0 = 24(x-a) \cdot f^{IV}(a)$
- ottengo quindi
 $f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 6f'''(a) + 24(x-a)f^{IV}(a) + \dots$

$$f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 6f'''(a) + 24(x-a)f^{IV}(a) + \dots$$

Nella derivata terza ho $f'''(x) = 6f'''(a)$ mentre dovrei avere $f'''(x) = f'''(a)$ quindi perche' sia valida l'uguaglianza il quarto termine dopo l'uguale va diviso per 6 e siccome avevo diviso per due il termine precedente questo va diviso per $6 = 2 \cdot 3$.

Faccio la derivata quarta

$$f^{IV}(x) = 0 + 0 + 0 + 0 + 24f^{IV}(a) + \dots$$

Nella derivata quarta ho $f^{IV}(x) = 24f^{IV}(a)$ mentre dovrei avere $f^{IV}(x) = f^{IV}(a)$ quindi perche' sia valida l'uguaglianza il quinto termine dopo l'uguale va diviso per 24 e siccome avevo diviso per sei il termine precedente questo va diviso per $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Il prossimo termine dovrà quindi essere diviso per 2·3·4·5;
quello dopo per 2·3·4·5·6;
eccetera.

Quindi la formula di Taylor è:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{2 \cdot 3} f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(a) + \dots$$

o, meglio ancora, per omogeneità mettiamo anche l'uno:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(a) + \dots$$

Otengo quindi la formula (fino alla derivata quarta):

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(a)$$

8. Formula di Taylor

Abbiamo trovato la formula (fino alla derivata quarta):

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(a) + \dots$$

Estendiamo alla derivata n ma prima usiamo la [notazione fattoriale](#).

Indichiamo con **!** il fattoriale di un numero cioè il prodotto di quel numero per tutti i suoi antecedenti.

Così ad esempio:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Formula di Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

L'ultimo termine della formula è il resto secondo Lagrange della formula ed è un **infinitesimo di ordine superiore** rispetto agli altri termini:

Approfondiamo un po' questo concetto di infinitesimo di ordine superiore. Consideriamo la nostra formula:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Quando x tende ad a il termine $(x-a)$ diventa infinitesimo.

Il grado di un infinitesimo di tipo $(x-a)$ corrisponde al valore dell'esponente.

Quando x tende ad a abbiamo che:

- il primo termine dopo l'uguale è una costante $f(a)$

- il secondo termine dopo l'uguale e' un infinitesimo di primo grado $(x-a)^1$ per una costante $f'(a)$
- il terzo termine dopo l'uguale e' un infinitesimo di secondo grado $(x-a)^2$ per una costante $f''(a)$
- il quarto termine dopo l'uguale e' un infinitesimo di terzo grado $(x-a)^3$ per una costante $f'''(a)$
-
- il penultimo termine dopo l'uguale e' un infinitesimo di grado n $(x-a)^n$ per una costante $f^{(n)}(a)$
- l'ultimo termine dopo l'uguale e' un infinitesimo di grado $n+1$ $(x-a)^{n+1}$ per il termine $f^{(n+1)}(a)$

Se un infinitesimo ha grado superiore rispetto ad un altro si dice che e' un infinitesimo di ordine superiore quindi l'ultimo termine della formula (il resto) e' un infinitesimo di ordine superiore

Si puo' anche considerare un'altra forma per il resto ([resto secondo Peano](#))

9. [Formula di Mac Laurin](#)

La formula di Maclaurin e' la formula di Taylor quando prendo come valore a lo zero, cioe' e' lo sviluppo di Taylor applicato all'origine.

Prendo la formula di Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Sostituisco zero al posto di a:

$$f(x) = f(0) + \frac{(x-0)}{1!} f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{(x-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

ed ottengo la formula di Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

10. [Sviluppo in serie di potenze di alcune funzioni elementari](#)

Vediamo ora come sviluppare in serie di potenze alcune funzioni:

- $y = e^x$
- $y = \sin x$
- $y = \cos x$

1) Sviluppare in serie di potenze la funzione:

$$y = e^x$$

Sviluppiamola in un intorno dell'origine (Mac Laurin) secondo la formula:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Cominciamo a calcolare $f(0)$ e le derivate $f'(0)$, $f''(0)$, ...

$f(x) = e^x$	$f(0) = e^0=1$
$f'(x) = (e^x)' = e^x$	$f'(0) = e^0=1$
$f''(x) = (e^x)'' = e^x$	$f''(0) = e^0=1$
$f'''(x) = (e^x)''' = e^x$	$f'''(0) = e^0=1$
$f^{IV}(x) = (e^x)^{IV} = e^x$	$f^{IV}(0) = e^0=1$
$f^V(x) = (e^x)^V = e^x$	$f^V(0) = e^0=1$
.....

Sostituendo lo sviluppo sara':

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Come vedi lo sviluppo si fa senza calcolare il resto:

Scriviamolo meglio:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Ora potremmo usare la serie trovata per calcolare il valore di e con la precisione che vogliamo:

Sostituendo 1 ad x in e^x avremo:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots = 2,71\dots$$

2) Sviluppare in serie di potenze la funzione:

$$y = \text{sen } x$$

Sviluppiamola in un intorno dell'origine (Mac Laurin) secondo la formula:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Cominciamo a calcolare $f(0)$ e le derivate $f'(0), f''(0), \dots$

$f(x) = \text{sen } x$	$f(0) = \text{sen } 0 = 0$
$f'(x) = (\text{sen } x)' = \text{cos } x$	$f'(0) = \text{cos } 0 = 1$
$f''(x) = -\text{sen } x$	$f''(0) = -\text{sen } 0 = 0$
$f'''(x) = -\text{cos } x$	$f'''(0) = -\text{cos } 0 = -1$
$f^{IV}(x) = \text{sen } x$	$f^{IV}(0) = \text{sen } 0 = 0$
$f^V(x) = \text{cos } x$	$f^V(0) = \text{cos } 0 = 1$
.....

Sostituendo lo sviluppo sara':

$$\text{sen } x = 0 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \cdot 0 + \frac{x^3}{3!} (-1) + \frac{x^4}{4!} \cdot 0 + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Scriviamolo meglio:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

3) Sviluppare in serie di potenze la funzione:

$$y = \text{cos } x$$

Sviluppiamola in un intorno dell'origine (Mac Laurin) secondo la formula:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Cominciamo a calcolare $f(0)$ e le derivate $f'(0), f''(0), \dots$

$f(x) = \cos x$	$f(0) = \cos 0 = 1$
$f'(x) = (\cos x)' = -\text{sen } x$	$f'(0) = -\text{sen } 0 = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -\cos 0 = -1$
$f'''(x) = \text{sen } x$	$f'''(0) = \text{sen } 0 = 0$
$f^{IV}(x) = \cos x$	$f^{IV}(0) = \cos 0 = 1$
$f^V(x) = -\text{sen } x$	$f^V(0) = -\text{sen } 0 = 0$
.....

Sostituendo lo sviluppo sara':

$$\cos x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{(-1)x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{(-1)x^5}{5!} + \dots$$

Scriviamolo meglio:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

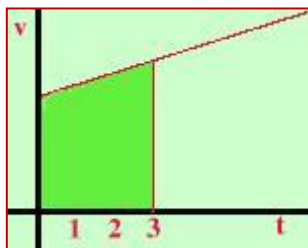
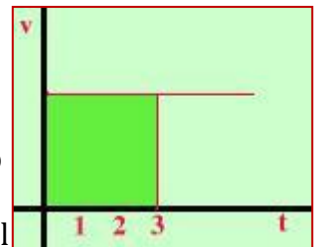
I. Il calcolo integrale

Insieme al calcolo delle derivate e' l'altra faccia del calcolo differenziale.

4. Introduzione

Per capire il perche' del calcolo integrale facciamo un semplice esempio.

Consideriamo il grafico della velocita' rispetto al tempo in un moto rettilineo uniforme.



Per conoscere lo spazio percorso quando il tempo e' 3 secondi e' sufficiente

considerare l'area del rettangolo di colore piu' scuro

Similmente, se il moto fosse uniformemente accelerato, la velocita' varierebbe in modo costante ed il grafico sarebbe quello a sinistra, e lo spazio al tempo 3 sarebbe il



trapezoido di colore piu' scuro.

Se ora consideriamo un moto con accelerazione variabile il grafico della velocita' diventa una curva e il calcolo dello spazio percorso si riduce a calcolare l'area del "trapezoide"; cosi' viene chiamata la parte di piano compresa fra il grafico e l'asse delle x (in figura la parte piu' scura).

Se noi riusciamo a calcolare l'area del trapezoide potremo risalire non solo dalla velocita' allo spazio, ma anche dall'accelerazione alla velocita', dalla forza al lavoro, eccetera; in pratica saremo capaci di fare l'operazione contraria alla derivazione .

Approfondiamo ora il problema delle aree.

a) Il problema delle aree

Il problema delle aree e' uno dei **tre grandi problemi** che ci sono stati tramandati dagli antichi.

Si tratta del problema della quadratura del cerchio o meglio della rettificazione della circonferenza: trovare il lato di un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio dato.

In pratica si tratta di trovare l'area di una regione di piano compresa all'interno di una curva; fra gli antichi il matematico che piu' si avvicino' alla soluzione fu Archimede di Siracusa (proprio quello degli specchi e del grido eureka! nella vasca da bagno), ma le sue idee geniali non trovarono seguito.

Gli altri due problemi erano:

- Trisezione di un angolo: dividere un angolo in tre parti uguali
- Duplicazione del cubo: trovare il lato di un cubo tale che il suo volume sia doppio del volume di un cubo dato

Interessante e' la storia di questo problema: a Delo era scoppiata una pestilenza e, per scongiurarla fu chiesto all'oracolo quale dono si dovesse fare al dio: fu risposto che si sarebbe dovuto duplicare il volume dell'altare di Apollo che era a forma di cubo. Nessuno seppero risolvere il problema.

I Greci risolvevano i problemi con riga e compasso (cosa che equivale ad usare solamente numeri naturali interi e razionali).

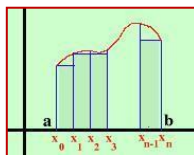
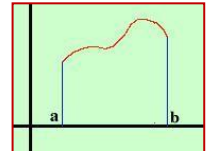
Oggi sappiamo che il problema non e' risolvibile con riga e compasso in quanto chiama in causa dei numeri reali non razionali quali:

$$\sqrt[3]{2}$$

5. Approccio Geometrico

Vogliamo trovare l'area del trapezoide

Dividiamo la base ab in intervalli e consideriamo tanti rettangoli, aventi come base questi intervalli e come altezza il minimo della funzione in questi intervalli.



Ho indicato solamente i primi rettangoli e l'ultimo, ma tu devi considerarli anche in mezzo.

L'area di tutti i rettangoli sara' minore dell'area del trapezoide

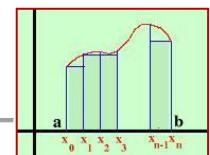
Pero' se prendo intervalli piu' corti la somma delle **aree dei rettangoli si avvicina sempre di piu' all'area del trapezoide.**



a) Soluzione matematica del problema

Faccio la somma delle varie aree dei rettangoli interni.

Indico l'altezza di ogni rettangolo con $f(x_k)$.



Per ora questo valore e' il valore minimo della funzione nell'intervallo considerato; in seguito vedremo che puo' essere un qualunque valore della funzione nell'intervallo.

Le basi saranno i segmenti:

$$(x_1 - x_0) \quad (x_2 - x_1) \quad (x_3 - x_2) \quad (x_4 - x_3) \quad \dots \quad (x_k - x_{k-1}) \quad \dots \quad (x_n - x_{n-1})$$

Le aree quindi saranno:

primo rettangolo	$(x_1 - x_0) \cdot f(x_1)$
secondo rettangolo	$(x_2 - x_1) \cdot f(x_2)$
terzo rettangolo	$(x_3 - x_2) \cdot f(x_3)$
quarto rettangolo	$(x_4 - x_3) \cdot f(x_4)$
.....

k-esimo rettangolo	$(x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_k)$
.....
n-esimo rettangolo	$(x_n - x_{n-1}) \cdot f(x_n)$

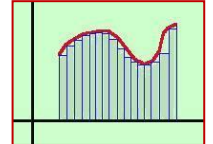
Sommo i rettangoli ed uso una formula piu' compatta:

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

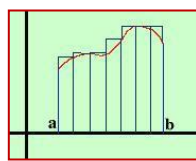
b) Area del trapezoide

Aumento il numero di intervalli in cui e' divisa la base del mio trapezoide, in questo modo l'area dei rettangoli si avvicina all'area del trapezoide:

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \text{Area del trapezoide}$$



Per essere sicuro di individuare bene l'area del trapezoide considero anche i



rettangoli che ottengo considerando come altezza il massimo della funzione nell'intervallo; in questo modo ottengo dei rettangoli esterni e la somma dei rettangoli e' superiore all'area del trapezoide.

Indico con $F(x_k)$ il massimo della funzione nell' intervallo $x_k - x_{k-1}$; allora avro':

$$\sum_{k=1}^{k=n} F(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \geq \text{Area del trapezoide}$$

Aumento il numero di intervalli in cui e' divisa la base del mio trapezoide e li faccio diventare infiniti in modo che l'area dei rettangoli diventi uguale all'area del trapezoide; per fare questo dovremo fare il limite delle somme precedenti per n tendente ad infinito, quindi ci avvicineremo all'area da valori superiori e da valori inferiori e l'area viene ben determinata:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=n} F(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \text{Area} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

c) Definizione di integrale

Ora definiamo come integrale l'area del trapezoide: la sommatoria si trasforma in una sommatoria medioevale, l'intervallo generico $x_k - x_{k-1}$ diventa l'infinitesimo dx

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Quindi possiamo definire l'integrale come il limite della sommatoria dell'area dei rettangoli interni (od esterni) quando suddivido il segmento di base in infiniti intervalli.

Il concetto di integrale non e' universale come il concetto di derivata: nel concetto di integrale possiamo, ad esempio, considerare gli intervalli in cui viene diviso il segmento di base tutti uguali oppure anche diversi fra loro, otterremo due definizioni diverse; ancora possiamo considerare invece del valore minimo o massimo della funzione nell'intervallo un valore qualunque (tanto quando l'intervallo diventa infinitesimo il minimo ed il massimo diventano uguali) ed otterremo un'altra definizione perfettamente valida; Quello che abbiamo fatto noi, con i segmentini suddivisi tutti in modo uguale e con il massimo ed il minimo si chiama Integrale di Riemann.

6. Approccio Algebrico (definizione algebrica di integrale)

E' anche possibile definire semplicemente l'integrale dal punto di vista algebrico come operazione inversa della operazione di derivata; l'integrale allora prendera' il nome di **integrale indefinito**.

a) Integrale come operazione inversa di derivata

Il definirlo non e' un problema, pero' dovremo mostrare come collegare la definizione di integrale indefinito a quella di integrale definito, in modo da avere una stretta corrispondenza fra l'uno e l'altro, cioe' far derivare la definizione di integrale indefinito da quella di integrale definito.

Facciamo nelle prossime pagine un breve cenno su come impostare questa corrispondenza.

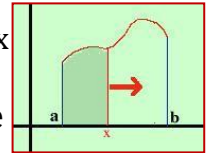
b) La funzione integrale

Dobbiamo definire una funzione il cui valore completo sia uguale al valore dell'integrale definito sull'intervallo a,b.

Il modo piu' semplice e' di considerare l'integrale definito da a ad x essendo x un punto variabile che va da a a b.

Man mano che x si sposta da **a** a **b**, la funzione varia da zero al valore dell'area (cioe' dell'integrale definito), e' quindi una funzione

crecente:



$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

c) Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la derivata della funzione integrale e' uguale alla funzione di partenza.

Indicando la derivata rispetto ad x con D avremo:

$$D[F(x)] = D \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

Questo teorema (che di solito alle superiori non si dimostra) evidenzia che l'integrale definito e l'integrale indefinito sono tra loro strettamente collegati e che e' giusto definire l'integrale indefinito come operazione inversa della derivata.

7. Calcolo degli integrali indefiniti

a) Introduzione

Consideriamo ora l'integrale solo dal punto di vista algebrico, cioe' come integrale indefinito.

Quindi consideriamo l'integrale come operazione inversa della derivata.

Osservazione:

La derivata di una costante vale zero; quindi quando faremo un integrale potremo sempre pensare che assieme alla funzione che troveremo vi sia anche una costante aggiuntiva: sarebbe a dire che per ogni integrale che farò 'aggiungerò' al risultato una costante (+c) perché facendo la derivata quella costante diventerà zero.

Questo ci porta a dire che l'integrale di una funzione non è una funzione ma tante funzioni che differiscono per una costante: cioè se ad esempio l'integrale di una funzione è $3x$ allora saranno integrali anche $3x+1$ come $3x+2$, $3x-5$ eccetera eccetera.

b) Tabella dei principali integrali

Viene data ora la tabella dei principali integrali indefiniti: comunque, qualunque integrale che calcolerai, una volta calcolato potrà essere aggiunto alla tabella.

Ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte è anche possibile costruire un'altra tabella parallela ove al posto di x ci sia una funzione accompagnata dalla sua derivata:

$\int f(x) dx$	=	$F(x) + c$
$\int 1 dx$	=	$x + c$
$\int x^n dx$ con n diverso da -1	=	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \frac{1}{x} dx$	=	$\ln x + c$
$\int \cos x dx$	=	$\sin x + c$
$\int \sin x dx$	=	$-\cos x + c$
$\int e^x dx$	=	$e^x + c$
$\int a^x dx$	=	$\frac{1}{\ln a} a^x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	=	$\arcsin x + c$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx$	=	$\arctan x + c$

Ho messo solamente alcuni integrali: quelli più usati nelle scuole superiori; comunque sul tuo libro di matematica troverai una tabella più completa.

Per $\ln x$ si intende $\log_e x$.

(1) Tabella applicata alle funzioni di funzione

Ricordando la regola per la derivata di una funzione di funzione:

funzione: $y = f[g(x)]$ derivata: $y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

Se devo fare un integrale di una funzione ed e' presente anche la sua derivata allora posso considerare la funzione come se fosse una x e quindi applicare la regola di integrazione data nella tabella precedente. Esempio:

$$\int (x^2 + 1)^4 \cdot 2x \, dx =$$

2x e' la derivata di x^2+1 , quindi posso fare l'integrale come se fosse x^4 dove al posto di x c'e' la funzione x^2+1 ed ottengo:

$$= \frac{(x^2+1)^{4+1}}{4+1} = \frac{(x^2+1)^5}{5} + c$$

Se ora derivo il risultato, devo prima fare la derivata della potenza e poi la derivata dell'interno cioe' di x^2+1 e quindi riottengo la funzione di partenza.

Un tempo si teneva molto a risolvere gli integrali con queste regole, oggi si preferisce risolverli in modo automatico applicando l'[integrazione per sostituzione](#): infatti basta sostituire alla funzione una variabile t e l'integrale si puo' fare in modo quasi automatico.

Facciamo per le funzioni una tabella analoga alla precedente:

$\int f(x) \, dx$	=	$F(x) + c$
$\int [f(x)]^n f'(x) \, dx$ con n diverso da -1	=	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$	=	$\ln f(x) + c$
$\int \cos[f(x)] \cdot f'(x) \, dx$	=	$\text{sen}[f(x)] + c$
$\int \text{sen}[f(x)] \cdot f'(x) \, dx$	=	$-\cos[f(x)] + c$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx$	=	$e^{f(x)} + c$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx$	=	$\frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} \, dx$	=	$\arcsen [f(x)] + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}} \, dx$	=	$\arctang [f(x)] + c$

Per $\ln f(x)$ si intende $\log_e f(x)$.

c) Calcolo di un integrale indefinito

Vediamo ora come procedere per calcolare un integrale indefinito

- Come prima cosa devi vedere se l'integrale e' immediato, cioe' se e' compreso nella tabella degli integrali o e' riconducibile ad essi.
- Se l'integrale non e' immediato devi vedere se si puo' risolvere mediante sostituzione: in genere e' risolvibile per sostituzione se l'argomento dell'integrale contiene contemporaneamente una funzione e la sua derivata.
- Se l'integrale non e' per sostituzione dovrai provare l'integrazione per parti: potrai fare l'integrale per parti se l'argomento dell'integrale si puo' spezzare in due funzioni, una di cui conosci l'integrale e l'altra di cui conosci la derivata.
- Se ancora non hai risolto l'integrale osserva se e' una funzione razionale ed in tal caso usa il metodo per le funzioni razionali.
- Se poi non e' una funzione razionale prova a sviluppare la funzione in serie di potenze e fai l'integrale di ogni termine della serie.

Vediamo ora , pagina per pagina, di studiare i metodi di integrazione cui ho fatto riferimento.

d) Alcune regole operative

Vediamo ora un paio di regole utilizzate per il calcolo degli integrali indefiniti (regole di linearita'):

- L'integrale di una somma di funzioni e' uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni:

$$\int [f(x) + g(x) + h(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx + \int h(x) dx$$

Cioe' se ho una somma faccio l'integrale di ogni singolo termine.

- L'integrale di una costante per una funzione e' uguale alla costante per l'integrale della funzione:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

In pratica posso estrarre le costanti moltiplicative da un integrale .

e) Integrali immediati

Sono i piu' facili, in pratica devi vedere se l'integrale che consideri appartiene a qualche integrale della tabella.

Fai attenzione pero' che se l'argomento non e' la x ma una funzione allora dovra' essere presente anche la derivata della funzione.

Se hai bisogno di vedere le [regole per esteso](#).

(se te ne accorgi che si puo' fare in questo modo tanto meglio, se non te ne accorgi non succede niente: ti viene in automatico applicando l'integrazione per sostituzione).

Qualcuno li indica anche come integrali per scomposizione, perche' si estracono le costanti e si fa la somma degli integrali delle funzioni componenti; io preferisco chiamare integrali per scomposizione quelli dove si aggiunge o toglie qualcosa, come vedrai nella pagina seguente.

Esempi sugli integrali immediati:

1) $\int (x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 3x + 7) dx =$

Calcolare il valore dell'integrale:

$$\int (x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 3x + 7) dx =$$

Trasformiamo in una somma di integrali ed estraiamo le costanti:

$$\int x^4 dx + 5 \int x^3 dx - 7 \int x^2 dx + 3 \int x dx + 7 \int dx =$$

Ora sono tutti integrali del tipo:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Eseguiamo il calcolo integrale per integrale (la costante la aggiungeremo nella soluzione finale):

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{x^5}{5}$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4}$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x dx = \int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2}$$

$$\int dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = x$$

Ti ricordo che $1 = x^0$

Quindi rimettendo la sua costante ad ogni risultato il risultato finale e':

$$= \frac{x^5}{5} + 5 \frac{x^4}{4} - 7 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} + 7x + c$$

$$2) \int (\sqrt[5]{x^4} + 5x^4 \sqrt{x^3} - x^2 \sqrt{x^2}) dx =$$

Trasformiamo in una somma di integrali ed estraiamo la costante 5:

$$\int \sqrt[5]{x^4} dx + 5 \int x^4 \sqrt{x^3} dx - \int x^2 \sqrt{x^2} dx =$$

Ora per trasformarli in integrali del tipo:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Devo mettere i radicali in [forma esponenziale](#). Ecco i calcoli:

Voglio trasformare i radicali in forma esponenziale (basta mettere alla x come esponente una frazione con denominatore l'indice della radice e con numeratore la potenza del radicando)

- nel primo termine ho:

$$\sqrt[5]{x^4} = x^{4/5}$$

- nel secondo termine devo prima portare la x da fuori a dentro radice (basta moltiplicare l'esponente della x per l'indice di radice)

$$x^4 \sqrt{x^3} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^3} = \sqrt[4]{x^7} = x^{7/4}$$

- anche nel terzo termine devo prima portare la x^2 da fuori a dentro radice (moltiplico l'esponente della x per l'indice di radice)

$$x^2 \sqrt{x^2} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^8} = x^{8/3}$$

quindi ottengo:

$$\int x^{4/5} dx + 5 \int x^{7/4} dx - \int x^{8/3} dx$$

Quindi, applicando la regola di integrazione, ottengo:

$$= \frac{x^{4/5+1}}{4/5+1} + 5 \frac{x^{7/4+1}}{7/4+1} - \frac{x^{8/3+1}}{8/3+1} =$$

$$= \frac{x^{9/5}}{9/5} + 5 \frac{x^{11/4}}{11/4} - \frac{x^{11/3}}{11/3} =$$

Riporto in forma di radice e ribalto il denominatore (moltiplico per l'inverso del denominatore):

$$= \frac{5\sqrt[5]{x^9}}{9} + 5 \frac{4\sqrt[4]{x^{11}}}{11} - \frac{3\sqrt[3]{x^{11}}}{11} =$$

Estraggo di radice quello che posso ed ottengo il risultato finale:

$$= \frac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9} + \frac{20x^2\sqrt[4]{x^3}}{11} - \frac{3x^3\sqrt[3]{x^2}}{11} + c$$

3) $\int \left(\frac{x}{\sqrt[5]{x^4}} + \frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}} \right) dx =$

Trasformiamo in una somma di integrali:

$$= \int \frac{x}{\sqrt[5]{x^4}} dx + \int \frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

Ora per trasformarli in integrali del tipo:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

devo mettere i radicali in **forma esponenziale** Ecco i calcoli:

Voglio trasformare i radicali in forma esponenziale: cioè voglio scriverli come x con esponente una frazione con denominatore l'indice della radice e con numeratore la potenza del radicando; inoltre per portare da sotto a sopra il segno di frazione (o viceversa) qualunque termine basterà cambiarne di segno l'esponente.

- Nel primo termine ho:

$$\frac{x}{\sqrt[5]{x^4}} = \frac{x^1}{x^{4/5}} = x^{1-4/5} = x^{1/5}$$

- Nel secondo termine devo prima portare la x² da fuori a dentro radice (basta moltiplicare l'esponente della x per l'indice di radice):

$$\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^8}} = x^{-8/3}$$

quindi ottengo:

$$= \int x^{1/5} dx + \int x^{-8/3} dx$$

Quindi, applicando la regola di integrazione, ottengo:

$$= \frac{x^{1/5+1}}{1/5+1} + \frac{x^{-8/3+1}}{-8/3+1} =$$

$$= \frac{x^{6/5}}{6/5} + \frac{x^{-5/3}}{-5/3} =$$

Riporto in forma di radice e ribalto il denominatore (moltiplico per l'inverso del denominatore):

$$= \frac{5\sqrt[5]{x^6}}{6} - \frac{3}{5\sqrt[3]{x^5}}$$

Estraggo di radice ed ottengo il risultato finale:

$$= \frac{5x\sqrt[5]{x}}{6} - \frac{3}{5x\sqrt[3]{x^2}} + c$$

$$4) \int \frac{1}{4x-3} dx =$$

Calcolare il valore dell'integrale:

$$\int \frac{1}{4x-3} dx =$$

Abbiamo al denominatore la funzione $4x - 3$ e sappiamo che la derivata di tale funzione è 4 ma al numeratore il 4 non c'è.

Allora mettiamo il 4 al numeratore e, per pareggiare mettiamo $1/4$ fuori dell'integrale:

$$= \frac{1}{4} \int \frac{4}{4x-3} dx =$$

Ora è un integrale del tipo:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$$

perché 4 è la derivata di $4x-3$ quindi avremo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \\ & = \frac{1}{4} \log |4x-3| + c \end{aligned}$$

$$5) \int \frac{4}{x^2+4x+5} dx =$$

Calcolare il valore dell'integrale:

$$\int \frac{4}{x^2+4x+5} dx$$

Osserviamo che al denominatore la funzione $x^2 + 4x + 5$ si può pensare come $x^2 + 4x + 4 + 1$ cioè come $(x+2)^2 + 1$ e siccome la derivata di $x+2$ vale 1 possiamo applicare la formula:

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \arctang |f(x)| + c$$

Quindi avremo:

$$= \int \frac{4}{(x+2)^2+1} dx = 4 \arctang (x+2) + c$$

$$6) \int (\sin 3x + 5 \cos 4x) dx =$$

Trasformiamo in una somma di integrali ed estraiamo le costanti:

$$\int \sin 3x dx + 5 \int \cos 4x dx =$$

Ora essendo la derivata di $3x$ uguale a 3 e la derivata di $4x$ uguale a 4 per trasformare gli integrali basterà moltiplicare il primo per 3 ed il secondo per 4 e, per pareggiare, dovrò moltiplicare il primo per $1/3$ ed il secondo per $1/4$:

$$\frac{1}{3} \int 3 \sin 3x dx + 5 \left(\frac{1}{4}\right) \int 4 \cos 4x dx =$$

Ora sono integrali del tipo:

$$\int \sin[f(x)] \cdot f'(x) dx = -\cos[f(x)] + c$$

$$\int \cos[f(x)] \cdot f'(x) dx = \sin[f(x)] + c$$

Quindi ottengo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \int 3 \sin 3x dx + 5 \left(\frac{1}{4}\right) \int 4 \cos 4x dx = \\ & = \frac{1}{3} (-\cos 3x) + \frac{5}{4} \sin 4x = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{5 \sin 4x}{4} + c \end{aligned}$$

$$7) \int x \sin x^2 dx =$$

Nota che la derivata di x^2 è $2x$ mentre io ho solamente x allora basterà moltiplicare l'integrale per 2 e, per pareggiare, dovrò anche moltiplicare per $1/2$:

$$= \frac{1}{2} \int 2x \sin x^2 dx =$$

Ora è un integrale del tipo:

$$\int \sin[f(x)] \cdot f'(x) dx = -\cos[f(x)] + c$$

con $f(x) = x^2$ ed $f'(x) = 2x$ quindi ottengo:

$$\int \frac{1 - \cos x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\sin x^2}{2} + c$$

f) Integrali per scomposizione

Sono integrali in cui devi aggiungere e, contemporaneamente, togliere qualcosa al numeratore per renderlo semplificabile con il denominatore. Se in questo modo ottieni integrali risolvibili sei a posto, altrimenti provi un altro metodo.

Vediamo un semplice esempio:

$$\int \frac{x}{x-1} dx =$$

Aggiungo al numeratore -1 per renderlo uguale al denominatore ed anche +1 per non variare di valore l'espressione:

$$= \int \frac{x-1+1}{x-1} dx =$$

Ora "spezzo" il numeratore in modo da avere due frazioni con lo stesso denominatore:

$$= \int \frac{x-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-1} dx =$$

Posso semplificare:

$$= \int 1 dx + \int \frac{1}{x-1} dx =$$

e questi sono due integrali immediati:

$$= x + \log|x-1| + c$$

g) Integrali per sostituzione

Si riconoscono perché c'è una funzione ed è presente anche la sua derivata a meno di fattori costanti. Per risolvere un integrale si pone la funzione uguale ad una variabile t e si sostituisce in tutto l'argomento dell'integrale: si ottiene un nuovo integrale nella variabile t. Si integra il nuovo integrale così ottenuto poi, nel risultato, al posto di t si rimette la funzione di partenza: vediamo in particolare il metodo su di un esempio.

Calcolare:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx$$

la derivata di $x^2 + 4x + 5$ è $2x+4$; allora pongo:

$$x^2 + 4x + 5 = t$$

Faccio il **differenziale** da una parte e dall'altra dell'uguale.

Equivalenza a fare la derivata a sinistra rispetto ad x e poi moltiplicarla per dx, a destra derivare rispetto a t (viene 1) e moltiplicare la derivata per dt.

$$(2x+4)dx = dt$$

Ricavo dx:

$$dx = \frac{dt}{2x+4}$$

Sostituisco quello che posso nell'integrale di partenza:

$$\int \frac{2x+4}{t} \frac{dt}{2x+4}$$

Posso semplificare $2x+4$ sopra e sotto ed ottengo un integrale nella sola t che vado a risolvere:

$$\int \frac{1}{t} dt = \log |t| + c$$

Ora sostituisco a t il suo valore ed ottengo il risultato finale:

$$\log |x^2 + 4x + 5| + c$$

Con $\log x$ intendiamo sempre il logaritmo naturale di x.

Ricapitolando:

- Decidi quale funzione considerare come t
- Poni la funzione uguale a t
- Fai il differenziale a destra ed a sinistra dell'uguale
- Ricava dx
- Sostituisci nell'integrale di partenza alla funzione il valore t ed a dx il valore ricavato
- Controlla che spariscano tutti i termini con la x (se non spariscono torna all'inizio e considera se possibile un'altra funzione; se non puoi considerare un'altra funzione passa a provare l'integrazione per parti)
- Calcola l'integrale con la t
- Sostituisci nel risultato a t la funzione iniziale

Vediamo ora alcuni [esercizi](#) per meglio fissare il concetto.

Il primo era già stato calcolato come integrale immediato:

$$1) \int \frac{1}{4x-3} dx =$$

La derivata di $4x - 3$ è 4, allora pongo:

$$4x - 3 = t$$

Faccio il differenziale da una parte e dall'altra dell'uguale:

$$4dx = dt$$

Ricavo dx:

$$dx = \frac{dt}{4}$$

Sostituisco quello che posso nell'integrale di partenza:

$$\int \frac{1}{t} \frac{dt}{4}$$

Posso estrarre 1/4 dall'integrale ed ottengo un integrale immediato:

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt = 1/4 \log |t| + c$$

Ora sostituisco a t il suo valore ed ottengo il risultato finale:

$$= 1/4 \log |4x - 3| + c$$

$$2) \int \sin 5x dx =$$

Pongo:

$$5x = t$$

Faccio il differenziale da una parte e dall'altra dell'uguale:

$$5dx = dt$$

Ricavo dx:

$$dx = \frac{dt}{5}$$

Sostituisco quello che posso nell'integrale di partenza:

$$\int \sin t \frac{dt}{5} =$$

Posso estrarre 1/5 dall'integrale ed ottengo un integrale immediato:

$$= \frac{1}{5} \int \sin t \, dt = \frac{1}{5} (-\cos t) + 5$$

Ora sostituisco a t il suo valore ed ottengo il risultato finale:

$$= -\frac{1}{5} \cos 5x + c$$

$$3) \int x^2 \sin x^3 \, dx =$$

Siccome x^2 , a parte le costanti, e' la derivata di x^3 pongo:

$$x^3 = t$$

Faccio il differenziale da una parte e dall'altra dell'uguale:

$$3x^2 dx = dt$$

Ricavo dx:

$$dx = \frac{dt}{3x^2}$$

Sostituisco quello che posso nell'integrale di partenza:

$$\int x^2 \sin t \frac{dt}{3x^2} =$$

Semplifico x^2 ed ottengo:

$$\int \sin t \frac{dt}{3} =$$

Posso estrarre $1/3$ dall'integrale ed ottengo un integrale immediato:

$$= \frac{1}{3} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{3} (\cos t) + c$$

Ora sostituisco a t il suo valore ed ottengo il risultato finale:

$$= -\frac{1}{3} \cos x^3 + c$$

$$4) \int \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2} \, dx =$$

Sotto posso porre

$$x^4 + 2x^2 + 2 = x^4 + 2x^2 + 1 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1$$

cioe':

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1} \, dx =$$

inoltre osservo che la derivata di $(x^2 + 1)$ e' $2x$, quindi pongo

$$x^2 + 1 = t$$

faccio il differenziale da una parte e dall'altra dell'uguale

$$2x dx = dt$$

ricavo dx

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

Sostituisco quello che posso nell'integrale di partenza:

$$\int \frac{2x}{(t^2 + 1)^2 + 1} \frac{dt}{2x} =$$

Semplifico $2x$ ed ottengo:

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2 + 1} =$$

e questo e' un integrale immediato

$$= \arctang t$$

Ora sostituisco a t il suo valore ed ottengo il risultato finale
 $= \arctang(x^2 + 1) + c$

$$5) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx =$$

Sotto posso raccogliere a^2

$$a^2 [1 + (x^2/a^2)]$$

cioè:

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + (x^2/a^2)} dx =$$

pongo

$$x$$

$$--- = t$$

$$a$$

faccio il [differenziale](#) da una parte e dall'altra dell'uguale

$$dx$$

$$---- = dt$$

$$a$$

ricavo dx

$$dx = a dt$$

Sostituisco quello che posso nell'integrale di partenza:

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + t^2} a dt =$$

Estraggo la costante a:

$$\frac{a}{a^2} \int \frac{1}{1 + t^2} dt =$$

Integro

$$1$$

$$= --- \arctang t$$

$$a$$

Ora sostituisco a t il suo valore ed ottengo il risultato finale

$$1 \quad x$$

$$= --- \arctang --- + c$$

$$a \quad a$$

Questo integrale sarebbe da aggiungere agli integrali immediati

h) Integrali per parti

La formula per l'integrazione per parti deriva dalla formula per la [derivata di un prodotto](#):

Infatti abbiamo, indicando la derivata con '

$$(f \cdot h)' = f' \cdot h + f \cdot h'$$

La derivata di un prodotto di funzioni è uguale alla derivata della prima funzione per la seconda non derivata più la derivata della seconda funzione per la prima non derivata

Ricavando $f \cdot h'$ ottengo

$$f \cdot h' = (f \cdot h)' - f' \cdot h$$

ora se $h' = g$ sarà $h = \int g$

sostituendo

$$f \cdot g = (f \cdot \int g)' - f' \cdot \int g$$

applicando l'integrazione ad ogni termine

$$\int f \cdot g = \int (f \cdot \int g)' - \int (f' \cdot \int g)$$

Ricordando che l'integrale è l'inverso della derivata posso togliere l'integrale e la derivata nel primo termine dopo l'uguale ed ottengo:

$$\int f \cdot g = f \cdot \int g - \int (f' \cdot \int g)$$

che e' la formula di integrazione per parti.

La maggior difficolta' e' data dal fatto che e' possibile presentare la formula in [modi diversi](#) lo preferisco questa formula che mi sembra la piu' semplice:

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot \int g(x) dx - \int (f'(x) \cdot \int g(x) dx) dx$$

o, in modo abbreviato:

$$\int f \cdot g = f \cdot \int g - \int (f' \cdot \int g)$$

Intuitivamente, dovendo fare l'integrale del prodotto di due funzioni di una devi saperne fare l'integrale e dell'altra la derivata.

Molto spesso di una funzione conosci sia l'integrale che la derivata, in questo caso devi scegliere in modo che il risultato sia un integrale piu' semplice di quello di partenza: ad esempio se considero x^3 da derivare ottengo $3x^2$ cioe' un grado piu' basso mentre se la considero da integrare ottengo $x^4/4$ cioe' un grado piu' alto; di solito devo cercare di trovare dei gradi piu' bassi: l'esempio qui sotto fa eccezione.

Esempio: calcolare

$$\int x \log x dx$$

Si tratta di un prodotto di funzioni: della funzione logaritmo conosco bene la derivata ($1/x$), della funzione x conosco bene l'integrale. Quindi pongo

$$f(x) = \log x$$

$$g(x) = x$$

Applicando la formula:

$$\int x \log x dx = \log x \int x dx - \int \left(\frac{1}{x} \int x dx \right) dx =$$

ricordando che l'integrale di x e' $x^2/2$ avro'

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

Semplifico ed estraggo $1/2$ dall'integrale

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx =$$

e risolvendo l'integrale:

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c$$

Per presentare la soluzione in modo piu' elegante raccogliamo $x^2/2$

$$= \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right) + c$$

Ricapitolando:

- Devo avere il prodotto di due funzioni
- Devo decidere quale funzione derivare e quale integrare
- Applico la formula ed eseguo i calcoli.

Un sottocaso abbastanza interessante dell'integrazione per parti e' la cosiddetta [integrazione per ricorrenza](#).

Esercizi: (con $\log x$ intendiamo sempre il logaritmo naturale di x)

1) $\int x \operatorname{sen} x dx =$

[Soluzione:](#)

Considero $\operatorname{sen} x$ come funzione di cui trovare l'integrale ed x come funzione di cui trovare la derivata cioe' dalla formula:

$$\int f \cdot g = f \cdot \int g - \int (f' \cdot \int g)$$

pongo:

$$f = x$$

$$g = \sin x$$

quindi ottengo:

$$= x \cdot \int \sin x \, dx - \int (1 \cdot \int \sin x \, dx) dx =$$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \, dx =$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

$$2) \int x^2 e^x \, dx =$$

Soluzione:

Considero e^x come funzione di cui trovare l'integrale ed x^2 come funzione di cui trovare la derivata (perché derivando si abbassera di grado) cioè dalla formula:

$$\int f \cdot g = f \cdot \int g - \int (f' \cdot \int g)$$

pongo:

$$f = x^2$$

$$g = e^x$$

quindi ottengo:

$$= x^2 \cdot \int e^x \, dx - \int (2x \cdot \int e^x \, dx) dx =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x e^x \, dx =$$

Integro per parti il secondo integrale ponendo:

$$f = x$$

$$g = e^x$$

$$= x^2 e^x - 2[x \cdot \int e^x \, dx - \int (1 \cdot \int e^x \, dx) dx] =$$

$$= x^2 e^x - 2(x \cdot e^x - \int e^x \, dx) =$$

$$= x^2 e^x - 2(x \cdot e^x - e^x \, dx) =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c =$$

Raccogliendo e^x :

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + c =$$

$$3) \int \log x \, dx$$

Soluzione:

Poiché qui c'è una funzione sola per avere due funzioni possiamo pensare di avere:

$$\int 1 \cdot \log x \, dx =$$

Considero 1 come funzione di cui trovare l'integrale e $\log x$ come funzione di cui trovare la derivata cioè dalla formula:

$$\int f \cdot g = f \cdot \int g - \int (f' \cdot \int g)$$

pongo:

$$f = \log x$$

$$g = 1$$

quindi ottengo:

$$= \log x \cdot \int 1 \, dx - \int ((1/x) \cdot \int 1 \, dx) dx =$$

$$= \log x \cdot x - \int (1/x) \cdot x \, dx =$$

$$= \log x \cdot x - \int 1 \, dx =$$

$$= x \log x - x + c =$$

Raccogliendo x :

$$= x(\log x - 1) + c$$

È questo un integrale che sarebbe bene aggiungere alla tabella degli integrali immediati.

$$4) \int x \arctang x \, dx =$$

Soluzione:

Questa volta c'è poco da scegliere: di $\arctang x$ conosco solo la derivata e non l'integrale quindi considero x come funzione di cui trovare l'integrale e $\arctang x$ come funzione di cui trovare la derivata cioè dalla formula:

$$\int f \cdot g = f \cdot \int g - \int (f' \cdot \int g)$$

Pongo:

$$f = \arctang x$$

$$g = x$$

quindi ottengo:

$$= \arctang x \cdot \int x \, dx - \int \left(\frac{1}{1+x^2} \int x \, dx \right) dx =$$

$$= \arctang x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctang x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

Nel secondo integrale aggiungo e tolgo 1 al numeratore **Integrali per scomposizione** :

$$= \frac{x^2}{2} \arctang x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx =$$

spezzo l'integrale in due:

$$= \frac{x^2}{2} \arctang x - \frac{1}{2} \left(\int \frac{x^2 + 1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctang x - \frac{1}{2} \left(\int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right) =$$

Ora so fare entrambe gli integrali (sono immediati):

$$= \frac{x^2}{2} \arctang x - \frac{1}{2} (x - \arctang x) =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctang x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctang x + c$$

i) Integrazione per ricorrenza

Gli integrali per ricorrenza sono abbastanza "strani": devi integrare finché lo stesso integrale non compare dall'altra parte ma con segno cambiato: uguagliando il primo e l'ultimo termine puoi ricavarne il valore. Vediamo il metodo su di un esempio calcolare:

$$\int \text{sen}^2 x \, dx$$

Posso calcolarlo per parti pensandolo come:

$$\int (\text{sen } x) \cdot (\text{sen } x) \, dx$$

Si tratta di un prodotto di funzioni: e della funzione $\text{sen } x$ conosco bene sia la derivata che l'integrale. Quindi pongo:

$$f(x) = \text{sen } x$$

$$g(x) = \text{sen } x$$

Applicando la formula e ricordando che la derivata di $\text{sen } x$ è $\text{cos } x$:

$$\int (\text{sen } x) \cdot (\text{sen } x) \, dx = \text{sen } x \int \text{sen } x \, dx - \int (\text{cos } x \int \text{sen } x \, dx) \, dx =$$

ricordando che l'integrale di $\text{sen } x$ è $-\text{cos } x$ avrò:

$$= \text{sen } x (-\text{cos } x) - \int [(\text{cos } x)(-\text{cos } x)] \, dx =$$

Calcolando:

$$= -\text{sen } x (\text{cos } x) + \int \text{cos}^2 x \, dx =$$

ora ricordando che $\text{cos}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ **prima relazione fondamentale della trigonometria**:

$$= -\text{sen } x (\text{cos } x) + \int (1 - \text{sen}^2 x) \, dx =$$

trasformiamo in una somma di integrali:

$$= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx =$$

cioè:

$$= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

Ora se scrivo il primo e l'ultimo passaggio ottengo:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

è un'equazione di incognita $\int \sin^2 x \, dx$ la ricavo:

$$2 \int \sin^2 x \, dx = x - \sin x \cos x$$

dividendo per 2 ottengo il risultato finale:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c$$

j) Integrali di funzioni razionali

(1) Introduzione

Per poter eseguire gli esercizi relativi a questo argomento è essenziale sia conoscere il metodo di [divisione dei polinomi](#) che saper fare la [scomposizione di Ruffini](#).

Se ho una funzione razionale fratta come prima cosa devo controllare che il numeratore abbia grado inferiore al denominatore; in caso contrario devo dividere il numeratore per il denominatore fino ad ottenere il resto, perché vale l'[uguaglianza](#):

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

avendo posto:

$N(x)$ numeratore

$D(x)$ denominatore

$Q(x)$ quoziente

$R(x)$ resto

$Q(x)$ sarà un polinomio quindi sappiamo integrarlo; il nostro problema è ora saper integrare il termine:

$R(x)$

$D(x)$

Esempio: vediamo un esempio di riduzione della frazione; supponiamo di dover calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \, dx$$

Eseguiamo la divisione fra polinomi:

$$\begin{array}{r} x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 3 \\ -x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2 \\ \hline -3x^3 + 4x^2 - 4x + 3 \\ + 3x^3 - 6x^2 - 4x + 3 \\ \hline 0x^3 - 2x^2 - 4x + 3 \\ + 2x^2 - 4x + 2 \\ \hline 0x^2 - 4x + 1 \\ + 4x - 4 \\ \hline 0x - 3 \\ + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{-----} \\
 = \quad = \quad -2x^3 \quad = -4x + 3 \\
 \quad \quad \quad +2x^3 \quad -4x^2 \quad -2x + 4 \\
 \text{-----} \\
 = \quad -4x^2 - 6x + 7
 \end{array}$$

Il quoziente vale $x^2 - 2$

il resto vale $-4x^2 - 6x + 7$

quindi, invece dell'integrale iniziale, posso calcolare gli integrali:

$$= \int (x^2 - 2) dx + \int \frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$$

Nelle pagine seguenti vedremo come si possano calcolare integrali quali quello frazionario qui sopra ottenuto.

(2) Tipi di frazioni elementari

Le funzioni razionali si possono pensare come somma di 4 tipi fondamentali di frazioni elementari, dipendenti dalle radici che possiamo ottenere eguagliando a zero i denominatori e quindi dipendenti dalle radici dei denominatori stessi (in accordo con il [teorema fondamentale dell'algebra](#)):

Le radici possono essere

1. Reali e distinte
2. Reali e coincidenti
3. Complesse e coniugate semplici
4. Complesse e coniugate multiple

avremo

1. per ogni radice reale distinta dovremo considerare il fattore:

A

$x - x_1$

2. Essendo A (B,C,...) una costante da determinare ed x_1 la radice.
3. per ogni radice reale di molteplicità ad esempio 3 dovremo considerare contemporaneamente i fattori:

A

B

C

----- + ----- + -----

$x - x_1 \quad (x - x_1)^2 \quad (x - x_1)^3$

4. Essendo A, B, C costanti da determinare ed x_1 la radice reale multipla (nel nostro caso le tre soluzioni coincidenti).

5. per ogni coppia di radici complesse e coniugate dovremo considerare il fattore:

$Ax + B$

$x^2 + px + q$

6. Essendo A e B costanti da determinare ed $x^2 + px + q$ l'espressione con radici complesse e coniugate.

7. Se le stesse radici complesse e coniugate sono multiple, come ad esempio in $(x^2 + px + q)^3$ ove ci sono 3 coppie di radici complesse e coniugate dovremo considerare contemporaneamente i fattori:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q} + \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + px + q)^3}$$

8. Essendo A, B, C, D, E, F costanti da determinare

Nelle pagine seguenti vedremo come ogni funzione razionale si possa trasformare nella somma di queste funzioni elementari e vedremo che ognuna di queste funzioni ha il proprio integrale.

(3) Scomposizione di una frazione polinomiale nella somma di frazioni elementari

Questa parte riguarda solamente i polinomi, ma viene studiata ora perché serve principalmente per l'integrazione.

Il sistema migliore di vedere il metodo è di fare prima un esempio, poi ne scriveremo i punti principali.

Scomporre come somma di frazioni elementari la frazione.

È quella che abbiamo lasciato in sospeso nell'introduzione:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} =$$

Considero:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 =$$

Scompongo:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 =$$

Conto i termini dentro parentesi: sono 4 quindi vado a vedere le **scomposizioni a quattro termini**: prima ho il cubo di un binomio e direi che non va bene perché non ho termini al cubo, poi ho il raccoglimento parziale, proviamo a raccogliere il primo con il secondo ed il terzo con il quarto:

$$= x^2(x - 2) - 1(x - 2) =$$

poiché dentro parentesi tonde i termini sono uguali posso raccogliere:

$$= (x - 2)(x^2 - 1) =$$

Dentro la seconda parentesi ho due termini e posso scomporre come differenza di quadrati:

$$= (x - 2)(x - 1)(x + 1)$$

Le tre radici (reali e distinte) del denominatore sono 1, -1, 2

Posso scrivere la frazione come somma delle tre frazioni:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{C}{(x - 2)}$$

Devo trovare A B e C

A destra faccio il minimo comune multiplo:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}$$

Dopo un po' di calcoli:

$$\begin{aligned} A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1) &= \\ \text{Moltiplico prima i binomi} & \\ A(x^2 - 2x + x - 2) + B(x^2 - 2x - x + 2) + C(x^2 - 1) &= \\ \text{Sommo dentro parentesi} & \end{aligned}$$

$$A(x^2 - x - 2) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x^2 - 1) =$$

Moltiplico per le costanti

$$Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx + 2B + Cx^2 - C =$$

Formo il polinomio di secondo grado raccogliendo x^2 , x ed i numeri

$$x^2(A + B + C) + x(-A - 3B) - 2A + 2B - C$$

Otengo:

$$-4x^2 - 6x + 7 \qquad x^2(A + B + C) + x(-A - 3B) - 2A + 2B - C$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 \qquad (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

Vale il:

Principio di identità dei polinomi:

Due polinomi sono uguali se e solo se sono uguali tutti i termini dello stesso grado

quindi, essendo uguali i denominatori, perché anche i numeratori siano uguali deve essere:

$$A + B + C = -4$$

$$-A - 3B = -6$$

$$-2A + 2B - C = 7$$

Pongo a sistema le tre equazioni per calcolare A, B e C:

$$\begin{cases} A + B + C = -4 \\ -A - 3B = -6 \\ -2A + 2B - C = 7 \end{cases}$$

Io scrivo tutti i passaggi, tu, naturalmente puoi abbreviare.

Cambio di segno per avere positivi i primi coefficienti:

$$\begin{cases} A + B + C = -4 \\ A + 3B = 6 \\ 2A - 2B + C = -7 \end{cases}$$

$$A + 3B = 6$$

$$2A - 2B + C = -7$$

Procedo per **sostituzione**, ricavo A dalla prima equazione:

$$\begin{cases} A = -B - C - 4 \\ A + 3B = 6 \\ 2A - 2B + C = -7 \end{cases}$$

$$A + 3B = 6$$

$$2A - 2B + C = -7$$

Sostituisco nelle altre due equazioni:

$$\begin{cases} -B - C - 4 + 3B = 6 \\ 2(-B - C - 4) - 2B + C = -7 \end{cases}$$

$$2(-B - C - 4) - 2B + C = -7$$

Calcolo:

$$\begin{cases} 2B - C - 4 = 6 \\ -2B - 2C - 8 - 2B + C = -7 \end{cases}$$

$$-2B - 2C - 8 - 2B + C = -7$$

$$\begin{cases} 2B - C = 6 + 4 \\ -4B - C = -7 + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2B - C = 10 \\ 4B + C = -1 \end{cases}$$

$$4B + C = -1$$

Ricavo C dalla terza:

$$\begin{cases} 2B - C = 10 \\ C = -1 - 4B \end{cases}$$

$$C = -1 - 4B$$

Sostituisco nella seconda:

$$2B - (-1 - 4B) = 10$$

Calcolo:

$$\begin{cases} 2B + 1 + 4B = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2B + 4B = 10 - 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6B = 9 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 9/6 = 3/2 \end{array} \right.$$

Sostituisco nella terza:

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 3/2 \\ C = -1 - 4(3/2) = -1 - 6 = -7 \end{array} \right.$$

Sostituisco anche nella prima:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -3/2 - (-7) - 4 = -3/2 + 7 - 4 = -3/2 + 3 = (-3 + 6)/2 = 3/2 \\ B = 3/2 \\ C = -7 \end{array} \right.$$

Ed ottengo il risultato finale:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 3/2 \\ B = 3/2 \\ C = -7 \end{array} \right.$$

Quindi posso scrivere:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{3/2}{(x-1)} + \frac{3/2}{(x+1)} + \frac{-7}{(x-2)}$$

o meglio:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{7}{(x-2)}$$

Riassumendo:

- Trovo le radici del denominatore
- Pongo la frazione uguale ad una somma di frazioni elementari dipendenti dalle radici trovate
- Faccio il minimo comune multiplo fra le frazioni elementari e calcolo il numeratore
- Pongo ogni termine del numeratore trovato uguale ad ogni termine del numeratore del polinomio di partenza (principio di identità dei polinomi) ottengo tante equazioni in A,B,C.. quante sono le incognite
- Metto a sistema le equazioni trovate per trovare il valore di A,B,C,...
- Sostituisco i valori trovati nelle frazioni elementari.

Ora si tratta di vedere come integrare le funzioni elementari.

(4) Integrazione delle frazioni elementari

Dobbiamo vedere ora come si integrano i 4 tipi fondamentali di frazioni elementari, per ciascuno di esse c'è la dimostrazione (se ti serve):

1. Primo tipo:

$$\int \frac{A}{(x-x_1)} dx = A \log |x - x_1| + c \quad \text{Dimostrazione:}$$

Devo risolvere:

$$\int \frac{A}{(x-x_1)} dx =$$

estraggo la costante:

$$A \int \frac{1}{(x-x_1)} dx =$$

È un integrale del tipo $1/x$ con al posto di x il valore $(x-x_1)$, quindi ottengo:

$$= A \log |x - x_1| + c$$

2. Secondo tipo:

$$\int \frac{A}{(x-x_1)^n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-x_1)^{n-1}} + c \quad \text{Dimostrazione:}$$

Devo risolvere:

$$\int \frac{A}{(x-x_1)^n} dx =$$

estraggo la costante:

$$A \int \frac{1}{(x-x_1)^n} dx =$$

per sostituzione pongo

$$(x-x_1) = t$$

faccio il differenziale da una parte e dall'altra dell'uguale ed ottengo (x_1 e' una costante)

$$dx = dt$$

Sostituisco nell'integrale di partenza:

$$A \int \frac{1}{t^n} dx = A \int t^{-n} dt = A \frac{t^{-n+1}}{(-n+1)} = \frac{A}{(1-n)t^{n-1}} + c$$

Da notare che $(1-n)$ e $(-n+1)$ sono lo stesso valore ed inoltre portando la potenza da sopra a sotto l'esponente della potenza cambia di segnoSostituendo a t il suo valore ottengo il risultato finale

$$\int \frac{A}{(x-x_1)^n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-x_1)^{n-1}} + c$$

3. terzo tipo

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \log(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{(4q-p^2)}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{(4q-p^2)}} \quad \text{Dimostrazione:}$$

Devo risolvere:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx =$$

voglio che al denominatore vi sia un termine al quadrato, perche' con i termini al quadrato ho alcuni integrali che so risolvere: x^2 e' il quadrato del primo termine, px sara' il doppio prodotto quindi devo aggiungere [e togliere] $(p^2/4)$:

$$= x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q =$$

quindi ottengo:

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} =$$

 $[q - (p^2/4)]$ e' una costante [positiva](#) quindi possiamo chiamarla k^2 ed ottengo:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k^2$$

Ora cerco di trasformare il numeratore in modo che vi compaia la derivata del denominatore iniziale $[2x + p]$ (in questo modo potro' poi dividere l'integrale in due integrali piu' semplici.

Al numeratore pongo:

$$Ax + B =$$

$$= \frac{A}{2} (2x) + B =$$

per avere la derivata (a meno del fattore $A/2$) devo aggiungere e togliere $(Ap)/2$

$$= \frac{A}{2} (2x) + B + \frac{A}{2} p - \frac{A}{2} p =$$

$$= \frac{A}{2} (2x + p) + B - \frac{A}{2} p$$

Quindi posso scrivere:

$$= \int \frac{(A/2)(2x + p) + B - (A/2)p}{x^2 + px + q} dx =$$

spezzo l'integrale:

$$= \int \frac{(A/2)(2x + p)}{x^2 + px + q} dx + \int \frac{B - (A/2)p}{x^2 + px + q} dx =$$

Estraggo le costanti e nel secondo integrale sostituisco il denominatore con l'espressione trovata prima:

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{A}{2}p\right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx =$$

E questi due integrali so risolverli: il primo e' immediato di tipo logaritmo, il secondo lo avevamo gia' [calcolato](#)

- Il primo:

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \log(x^2 + px + q)$$

- il secondo:

$$= \left(B - \frac{A}{2}p\right) \int \frac{1}{(x + p/2)^2 + k^2} dx =$$

$$= \left(B - \frac{A}{2}p\right) \frac{1}{k} \arctang \frac{x + p/2}{k} =$$

Ricordando che :

$$k^2 = q - \frac{p^2}{4} = \frac{4q - p^2}{4}$$

Ottingo:

$$= \frac{2B - Ap}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} \arctang \frac{x + p/2}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} =$$

Estraggo il 4 dai denominatori delle radici:

$$= \frac{2B - Ap}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{(4q - p^2)}}{2}} \arctang \frac{x + p/2}{\frac{\sqrt{(4q - p^2)}}{2}} =$$

il primo 2 estratto dalla radice si semplifica con il 2 al denominatore, il secondo lo porto al numeratore:

$$= \frac{2B - Ap}{\sqrt{(4q - p^2)}} \arctang \frac{2(x + p/2)}{\sqrt{(4q - p^2)}} =$$

moltiplico per 2 al numeratore ed ottengo la formula:

$$= \frac{2B - Ap}{\sqrt{(4q - p^2)}} \arctang \frac{2x + p}{\sqrt{(4q - p^2)}} =$$

Ottingo quindi la formula finale:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \log(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{(4q - p^2)}} \arctang \frac{2x + p}{\sqrt{(4q - p^2)}}$$

4. quarto tipo:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx =$$

Studiare questo e' da paranoici: non ho mai visto farlo in nessun ordine di scuola, anche perche' poi, se si da' come esercizio, bisogna correggerlo; comunque se pensi che il tuo Prof. sia abbastanza matto da darti un esercizio del genere qui di seguito metto la dimostrazione, ed in fondo alla dimostrazione metto la [formula risolutiva](#).

Devo risolvere:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx =$$

Procediamo esattamente come nell'integrale del terzo tipo (se questa parte l'hai gia' fatta e capita saltala pure) pero' ripassarla non fa mai male.

voglio che al denominatore, dentro parentesi, vi sia un termine al quadrato, perche' con i termini al quadrato ho alcuni integrali che so risolvere: x^2 e' il quadrato del primo termine, px sara' il doppio prodotto quindi devo aggiungere [e togliere] $(p^2/4)$:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q =$$

quindi ottengo:

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} =$$

$[q - (p^2/4)]$ e' una costante positiva quindi possiamo chiamarla k^2 ed ottengo:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k^2$$

Ora cerco di trasformare il numeratore in modo che vi compaia la derivata del denominatore iniziale $[2x + p]$ (in questo modo potro' poi dividere l'integrale in due integrali piu' semplici

Al numeratore pongo:

$$Ax + B =$$

$$\frac{A}{2} (2x) + B =$$

per avere la derivata (a meno del fattore $A/2$) devo aggiungere e togliere $(Ap)/2$:

$$= \frac{A}{2} (2x) + B + \frac{A}{2} p - \frac{A}{2} p =$$

$$= \frac{A}{2} (2x + p) + B - \frac{A}{2} p$$

Quindi posso scrivere:

$$= \int \frac{(A/2)(2x + p) + B - (A/2)p}{(x^2 + px + q)^2} dx =$$

spezzo l'integrale:

$$= \int \frac{(A/2)(2x + p)}{(x^2 + px + q)^n} dx + \frac{B - (A/2)p}{(x^2 + px + q)^n} =$$

Estraggo le costanti e nel secondo integrale sostituisco il denominatore con l'espressione trovata prima:

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + \left(B - \frac{A}{2}p\right) \int \frac{1}{[(x + p/2)^2 + k^2]^n} dx =$$

Devo risolvere questi due integrali

- il primo e' un integrale che posso fare per sostituzione:

$$\frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx =$$

$$\text{Pongo } x^2 + px + q = t$$

Faccio il differenziale da una parte e dall'altra dell'uguale:

$$(2x + p)dx = dt$$

ricavo dx:

$$dx = \frac{dt}{2x + p}$$

Sostituisco quello che posso nell'integrale di partenza:

$$\frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{t^n} \frac{dt}{2x + p} =$$

Semplifico $2x + p$ ed ottengo:

$$= \frac{A}{2} \int \frac{1}{t^n} dt =$$

Porto la variabile t al numeratore cambiando di segno l'esponente:

$$\frac{A}{2} \int t^{-n} dt = \frac{A}{2} \frac{t^{-n+1}}{-n+1}$$

Ora sostituisco a t il suo valore ed ottengo il risultato:

$$\frac{A(x^2 + px + q)^{-n+1}}{2(1-n)(x^2 + px + q)^{n-1}}$$

o meglio, cambiando di segno l'esponente per riportare al denominatore:

$$\frac{A}{2(1-n)(x^2 + px + q)^{n-1}}$$

- Considero il secondo:

$$= \left(B - \frac{A}{2}p\right) \int \frac{1}{[(x + p/2)^2 + k^2]^n} dx =$$

Facciamo anche questo per sostituzione.

Pongo $x + p/2 = kt$ (in questo modo k potrà essere raccolta con quella vicina ed estratta dalla potenza e dall'integrale).

Faccio il differenziale da una parte e dall'altra dell'uguale:

$$dx = k dt$$

Sostituisco quello che posso nell'integrale di partenza:

$$= \left(B - \frac{A}{2}p\right) \int \frac{1}{(k^2 t^2 + k^2)^n} k dt =$$

estraggo la costante k dalla potenza:

$$= \left(B - \frac{A}{2}p\right) \int \frac{1}{k^{2n}(t^2 + 1)^n} k dt =$$

Estraggo le costanti dall'integrale:

$$= \left(B - \frac{A}{2}p\right) \frac{k}{k^{2n}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt =$$

Semplifico:

$$= \left(B - \frac{A}{2}p\right) \frac{1}{k^{2n-1}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt =$$

metto la costante iniziale in modo più compatto; semplifico:

$$= \frac{(2B - Ap)k}{2k^{2n}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt =$$

Per semplicità continuo l'integrale senza considerare le costanti:

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt =$$

Provo l'integrazione per parti per vedere se riesco ad abbassare di grado l'espressione: dalla formula:

$$\int f \cdot g = f \int g - \int (f' \cdot g)$$

Ricordando che:

$$\frac{1}{(t^2 + 1)^n} = (t^2 + 1)^{-n}$$

Pongo:

$$f = (t^2 + 1)^{-n}$$

$$g = 1$$

quindi ottengo:

$$(t^2 + 1)^{-n} \int 1 dt - \int \left[-n(t^2 + 1)^{-n-1} \cdot 2t \int 1 dt \right] dt =$$

Il $2t$ prima dell'ultimo integrale deriva dal fatto che ho derivato una funzione di funzione:

$$\text{derivata di } (t^2 + 1)^{-n} = -n(t^2 + 1)^{-n-1} \cdot 2t$$

Porto il meno fuori dall'integrale ed integro i dt:

$$(t^2 + 1)^{-n} t + \int n(t^2 + 1)^{-n-1} \cdot 2t t dt =$$

$$= t(t^2 + 1)^{-n} + 2 \int t^2 (t^2 + 1)^{-n-1} dt =$$

Se ora lo riporto a forma frazionaria:

$$= \frac{t}{(t^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt =$$

Nell'integrale applico il metodo di aggiungere e togliere per semplificare con il denominatore (questo metodo lo abbiamo visto applicare negli integrali [per scomposizione](#) :

$$= \frac{t}{(t^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{t^2 + 1 - 1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt =$$

Spezzo l'integrale in due parti:

$$= \frac{t}{(t^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{t^2 + 1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt + 2n \int \frac{-1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt =$$

Nel primo integrale posso semplificare numeratore e denominatore:

$$= \frac{t}{(t^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt + 2n \int \frac{-1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt =$$

Ho ottenuto un integrale che a meno della costante e' uguale a quello di partenza: questo mi serve per trovare la formula (qualcosa di simile avevamo visto nell'integrazione **per ricorrenza**):

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt = \frac{t}{(t^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt - 2n \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt =$$

Porto l'ultimo integrale prima dell'uguale e sommo i due integrali in blu (basta sommare le costanti):

$$2n \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt = \frac{t}{(t^2 + 1)^n} + (2n - 1) \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$$

Ricavo il primo integrale dividendo tutto per 2n:

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt = \frac{t}{2n(t^2 + 1)^n} + \frac{2n - 1}{2n} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$$

Questa e' una forma per ricorrenza: mi permette di conoscere l'integrale conoscendo un integrale di grado inferiore nelle variabili: riferendolo a quello che vogliamo trovare cioe' sostituendo a n+1 la n ed alla n sostituendo n-1 otteniamo quello che cercavamo:

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt = \frac{t}{2(n - 1)(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2(n - 1) - 1}{2(n - 1)} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} dt$$

cioe':

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt = \frac{t}{2(n - 1)(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2(n - 1)} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} dt$$

ricordando che ho:

$$x + p/2 = kt$$

e che k vale:

$$k = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{4}$$

avro' che:

$$t = \frac{2x + p}{\sqrt{(4q - p^2)}}$$

Conviene lasciarlo cosi' come formula ed andarlo a calcolare solo quando hai i dati numerici dell'esercizio, anche perche' per calcolarlo ci vogliono vari passaggi:

Se e' di potenza 4 devo calcolare prima l'integrale con potenza 3

Per calcolare l'integrale con potenza 3 devo prima calcolare l'integrale con potenza 2

Per calcolare l'integrale con potenza 2 devo prima calcolare l'integrale con potenza 1 (che e' di tipo arcotangente).

Quindi ricapitolando ottengo che l'integrale:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx =$$

e' uguale a:

$$= \frac{A}{2(1 - n)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{2B - Ap}{2\left(\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}\right)^{2n-1}} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$$

Con:

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt = \frac{t}{2(1 - n)(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2(n - 1)} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} dt =$$

essendo:

$$t = \frac{2x + p}{\sqrt{(4q - p^2)}}$$

E' abbastanza complicato?

(5) Alcuni esercizi

Il primo esercizio e' quello che abbiamo gia' risolto a pezzi.

Calcolare i seguenti integrali:

1)

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx \quad \text{Soluzione:}$$

Eseguiamo la divisione fra polinomi:

$$\begin{array}{r} x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 3 \quad | \quad x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ -x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2 \quad | \quad \hline \hline -2x^3 - 4x + 3 \quad | \quad \\ + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 \quad | \quad \\ \hline -6x + 7 \quad | \quad \end{array}$$

Il quoziente vale $x^2 - 2$

il resto vale $-4x^2 - 6x + 7$

quindi, invece dell'integrale iniziale, posso calcolare gli integrali:

$$= \int (x^2 - 2) dx + \int \frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$$

Il primo lo calcolo, per il secondo devo applicare il metodo della scomposizione in frazioni di tipo elementare: considero il denominatore del secondo integrale:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 =$$

Scompongo:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 =$$

Conto i termini dentro parentesi: sono 4 quindi vado a vedere le [scomposizioni a quattro termini](#): prima ho il cubo di un binomio e direi che non va bene perche' non ho termini al cubo, poi ho il raccoglimento parziale, proviamo a raccogliere il primo con il secondo ed il terzo con il quarto:

$$= x^2(x - 2) - 1(x - 2) =$$

poiche' dentro parentesi tonde i termini sono uguali posso raccogliere:

$$= (x - 2)(x^2 - 1) =$$

Dentro la seconda parentesi ho due termini e posso scomporre come differenza di quadrati:

$$= (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

Le tre radici (reali e distinte) del denominatore sono 1, -1, 2.

Posso scrivere la frazione come somma delle tre frazioni:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{C}{(x - 2)}$$

Devo trovare A B e C :

A destra faccio il minimo comune multiplo:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}$$

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}$$

Faccio i calcoli:

$$A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1) =$$

Moltiplico prima i binomi

$$A(x^2 - 2x + x - 2) + B(x^2 - 2x - x + 2) + C(x^2 - 1) =$$

Sommo dentro parentesi

$$A(x^2 - x - 2) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x^2 - 1) =$$

Moltiplico per le costanti

$$Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx + 2B + Cx^2 - C =$$

Formo il polinomio di secondo grado raccogliendo x^2 , x ed i numeri

$$x^2(A + B + C) + x(-A - 3B) - 2A + 2B - C$$

Dopo i calcoli ottengo:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{x^2(A + B + C) + x(-A - 3B) - 2A + 2B - C}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}$$

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{x^2(A + B + C) + x(-A - 3B) - 2A + 2B - C}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}$$

Vale il

Principio di identità dei polinomi:

Due polinomi sono uguali se e solo se sono uguali tutti i termini dello stesso grado

quindi, essendo uguali i denominatori, perché anche i numeratori siano uguali deve essere:

$$A + B + C = -4$$

$$-A - 3B = -6$$

$$-2A + 2B - C = 7$$

Pongo a sistema le tre equazioni per calcolare A, B e C:

$$\begin{cases} A + B + C = -4 \\ -A - 3B = -6 & \text{Ecco i calcoli:} \\ -2A + 2B - C = 7 \end{cases}$$

Io scrivo tutti i passaggi, tu, naturalmente puoi abbreviare.

Cambio di segno per avere positivi i primi coefficienti:

$$\begin{cases} A + B + C = -4 \\ A + 3B = 6 \\ 2A - 2B + C = -7 \end{cases}$$

Procedo per sostituzione, ricavo A dalla prima equazione:

$$\begin{cases} A = -B - C - 4 \\ A + 3B = 6 \\ 2A - 2B + C = -7 \end{cases}$$

Sostituisco nelle altre due equazioni:

$$\begin{cases} -B - C - 4 + 3B = 6 \\ 2(-B - C - 4) - 2B + C = -7 \end{cases}$$

Calcolo:

$$\begin{cases} 2B - C - 4 = 6 \\ -2B - 2C - 8 - 2B + C = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2B - C = 6 + 4 \\ -4B - C = -7 + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2B - C = 10 \\ 4B + C = -1 \end{cases}$$

Ricavo C dalla terza:

$$\begin{cases} 2B - C = 10 \\ C = -1 - 4B \end{cases}$$

Sostituisco nella seconda:

$$2B - (-1 - 4B) = 10$$

Calcolo:

$$2B + 1 + 4B = 10$$

$$2B + 4B = 10 - 1$$

$$6B = 9$$

$$B = 9/6 = 3/2$$

Sostituisco nella terza:

$$\begin{cases} B = 3/2 \\ C = -1 - 4(3/2) = -1 - 6 = -7 \end{cases}$$

Sostituisco anche nella prima:

$$\begin{cases} A = -3/2 - (-7) - 4 = -3/2 + 7 - 4 = -3/2 + 3 = (-3 + 6)/2 = 3/2 \\ B = 3/2 \\ C = -7 \end{cases}$$

Ed ottengo il risultato finale:

$$\begin{cases} A = 3/2 \\ B = 3/2 \\ C = -7 \end{cases}$$

Quindi posso scrivere:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{3/2}{(x-1)} + \frac{3/2}{(x+1)} + \frac{-7}{(x-2)}$$

o meglio:

$$\frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{7}{(x-2)}$$

Quindi ottengo:

$$\begin{aligned} &= \int (x^2 - 2) dx + \int \frac{-4x^2 - 6x + 7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx = \\ &= \int x^2 dx - 2 \int dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - 7 \int \frac{1}{x-2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{3}{2} \log|x-1| + \frac{3}{2} \log|x+1| - 7 \log|x-2| + c \end{aligned}$$

2)

$$\int \frac{x^2 - 4}{x^4 - 2x^2 + 1} dx = \text{soluzione}$$

3)

$$\int \frac{x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 2} dx = \text{soluzione}$$

4)

$$\int \frac{x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx = \text{soluzione}$$

5)

$$\int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \text{soluzione}$$

6)

$$\int \frac{x}{x^4 + 4x^2 + 1} dx = \text{soluzione}$$

k) Integrazione per serie

E' l'ultima spiaggia: se non riesci a integrare in nessuno dei modi precedenti trasforma la funzione in serie di potenze e quindi integra ogni termine.

Il metodo di solito e' usato solamente all'Universita' quindi qui ci accontentiamo di questo semplice cenno.

Facciamo un semplice esercizio, giusto per vedere applicare il metodo, su un integrale che gia' conosciamo.

$$\int \cos x \, dx =$$

Sviluppo in serie di potenze la funzione:

$$y = \cos x$$

Sviluppiamola in un intorno dell'origine (Mac Laurin) secondo la formula

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Cominciamo a calcolare $f(0)$ e le derivate $f'(0), f''(0), \dots$

$f(x) = \cos x$	$f(0) = \cos 0 = 1$
$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$	$f'(0) = -\sin 0 = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -\cos 0 = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(0) = \sin 0 = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$
$f^{(5)}(x) = -\sin x$	$f^{(5)}(0) = -\sin 0 = 0$
.....

sostituendo lo sviluppo sara' :

$$\cos x = 1 + \frac{x}{1!} \cdot 0 + \frac{x^2}{2!} \cdot (-1) + \frac{x^3}{3!} \cdot 0 + \frac{x^4}{4!} \cdot 1 + \frac{x^5}{5!} \cdot 0 + \dots$$

Scriviamolo meglio:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

Ora eseguo l'integrale di ogni termine:

$$\int 1 \, dx = x$$

$$\int -\frac{x^2}{2!} \, dx = -\frac{x^3}{3 \cdot 2!} = -\frac{x^3}{3!}$$

$$\int -\frac{x^4}{4!} \, dx = -\frac{x^5}{5 \cdot 4!} = -\frac{x^5}{5!}$$

$$\int -\frac{x^6}{6!} \, dx = -\frac{x^7}{7 \cdot 6!} = -\frac{x^7}{7!}$$

$$\int -\frac{x^8}{8!} \, dx = -\frac{x^9}{9 \cdot 8!} = -\frac{x^9}{9!}$$

.....

quindi, osservando che i termini che abbiamo ottenuto sono quelli dello sviluppo **in serie di sen x**:

$$\int \cos x \, dx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sin x$$

Sviluppare in serie di potenze la funzione:

$$y = \sin x$$

Sviluppiamola in un intorno dell'origine (Mac Laurin) secondo la formula:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Cominciamo a calcolare $f(0)$ e le derivate $f'(0), f''(0), \dots$

$f(x) = \sin x$	$f(0) = \sin 0 = 0$
$f'(x) = (\sin x)' = \cos x$	$f'(0) = \cos 0 = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = -\sin 0 = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -\cos 0 = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$
.....

sostituendo lo sviluppo sara':

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} 1 + \frac{x^2}{2!} 0 + \frac{x^3}{3!} (-1) + \frac{x^4}{4!} 0 + \frac{x^5}{5!} 1 + \dots$$

Scriviamolo meglio:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

8. Integrali definiti

L'integrale definito e' il concetto iniziale di integrale come operazione finalizzata al **calcolo delle aree**.

a) Calcolare l'integrale definito

Per calcolare l'integrale definito useremo questa semplice regola:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

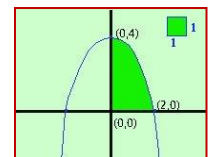
(la notazione $[F(x)]_a^b$ si legge: differenze da b ad a della funzione $F(x)$)

Cioe' prima calcoliamo l'integrale indefinito $F(x)$ poi sostituiamo alla x il valore superiore dell'integrale, mettiamo il segno meno e sostituiamo alla x il valore inferiore dell'integrale.

Esempio:

Calcolare l'area della regione di piano limitata dalla curva $y = -x^2 + 4$, e dai semiassi positivi delle x e delle y .

La prima cosa da fare e' costruire la rappresentazione grafica per capire bene come fare: a destra la **rappresentazione grafica**; l'area da trovare e' quella evidenziata.



Calcolare l'area della regione di piano limitata dalla curva $y = -x^2 + 4$, e dai semiassi positivi delle x e delle y

Facciamo la **rappresentazione grafica** completa del problema (**potrei abbreviare**) devo rappresentare graficamente la parabola:

$$y = -x^2 + 4$$

1) Troviamo le **coordinate** del vertice.

Abbiamo:

$$a = -1$$

$$b = 0$$

$$c = 4$$

Calcoliamo la coordinata x del vertice: V_x

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2} = 0$$

Calcoliamo la coordinata y del vertice: V_y

$$V_y = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{(0)^2 - 4(-1)(4)}{4} = 4$$

Otteniamo quindi:

$$V = (0; 4)$$

2) troviamo l'intersezione C con l'asse y

teoricamente dovremmo fare il sistema fra l'asse y (equazione $x=0$) e la parabola; pero' e' sufficiente prendere come prima coordinata 0 e come seconda coordinata il termine noto della parabola

$$C = (0; 4); \text{ da notare che coincide con il vertice}$$

3) troviamo le intersezioni con l'asse x, se esistono

Devo fare il sistema fra la parabola e l'equazione dell'asse x ($y=0$)

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sostituisco

$$\begin{cases} -x^2 + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

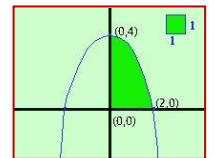
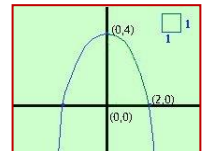
ottengo le soluzioni:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

quindi avremo $A=(-2,0)$ $B=(2,0)$

Devo mettere i punti in un sistema di assi cartesiani e tracciarne la congiungente ricordando che il vertice e' sempre il punto di massimo o di minimo della curva (vuol dire che sul vertice devo fare la conca)

Ora devo considerare la parte di piano compresa fra la curva e i semiassi positivi delle x e delle y, cioe' la parte nel primo quadrante



Siccome l'area sull'asse delle x va da 0 a 2, dovremo calcolare l'integrale:

$$\int_0^2 (-x^2 + 4) dx =$$

l'integrale e' immediato e vale $-x^3/3 + 4x$.

Per indicare che devo fare le differenze uso la notazione:

$$\int_0^2 (-x^2 + 4) dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 4x \right]_0^2 =$$

Ora sostituiamo prima 2 e poi 0:

$$= \frac{-2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(\frac{-0^3}{3} + 4 \cdot 0 \right) = \frac{-8}{3} + 8 - 0 = \frac{-8}{3} + 8 = \frac{16}{3}$$

quindi l'area vale $16/3$ di unita' quadrate del piano, cioe' 5 quadratini di lato 1 piu' un terzo di quadratino.

b) Proprietà dell'integrale definito - regole principali

Vediamo qui, sempre nel rispetto della regola di calcolo già data, la proprietà che rende il calcolo dell'integrale definito diverso da quello dell'integrale indefinito e che dà poi luogo ad alcune regole tipiche solo dell'integrale definito.

(1) Problema di calcolo di un'area separata dall'asse x

Vediamo di capire la situazione con un semplice problema:

Trovare l'area della zona di piano compresa fra la curva $y = \sin x$ e l'asse delle x dall'origine fino al punto 2π

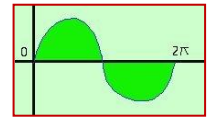
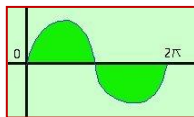
Osservando la rappresentazione grafica qui di fianco devo fare:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx =$$

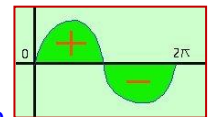
e quindi ricordando che l'integrale indefinito di $\sin x$ è $-\cos x$ ed applicando la regola vista per il calcolo avremo:

$$= [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 0 + \cos 2\pi = -1 + 1 = 0$$

Abbiamo trovato che l'area cercata vale zero!!!

**(2) Area positiva e negativa**

Come è possibile che un'area quale quella che vediamo qui a fianco valga zero?



L'unica risposta logica da dare è che l'integrale calcoli come positive le aree sopra l'asse delle x e come negative le aree situate sotto l'asse delle

(3) Soluzione del problema

Siccome parlare di aree negative è in matematica quasi una bestemmia dovremo vedere come rendere sempre positivi i valori delle aree:

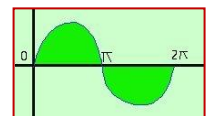
Dovremo considerare con segno positivo gli integrali calcolati su aree sopra l'asse x e considerare invece con segno cambiato (negativo) gli integrali calcolati su aree sotto l'asse delle x .

Quindi considerando che da zero a π siamo sopra l'asse x e che da π a 2π siamo sotto, per calcolare l'area cercata dovremo scrivere:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = \\ & = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = \\ & = -\cos \pi + \cos 0 - (-\cos 2\pi + \cos \pi) = \\ & = -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = \\ & = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = \\ & = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

l'area cercata è di 4 unità quadrate del piano.

La figura ha unità diverse in orizzontale e verticale perché π vale 3,14 e il seno in altezza varia da 1 a -1, quindi i quadratini unitari sarebbero dei rettangolini.

**(4) Proprietà degli integrali definiti**

Vediamo ora le proprietà tipiche degli integrali definiti:

- Cambiare di verso l'intervallo equivale a cambiare di segno l'integrale:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx =$$

- Se C e' un punto interno dell'intervallo AB allora avro':

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

essendo a,b e c le ascisse dei punti A,B e C.

Naturalmente, oltre queste, valgono tutte le proprieta' degli integrali indefiniti.

c) Calcolo di aree

Vediamo ora come si deve procedere per calcolare un area e quindi vediamo alcuni esercizi.

(1) Come calcolare un area

Quindi, visto le cose che abbiamo detto nelle pagine precedenti, per calcolare un area come:

$$\int_a^b f(x) dx =$$

conviene seguire questi punti .

- Costruire il grafico della funzione $y = f(x)$ o almeno la parte comprendente l'intervallo a,b
- Controllare che l'area sia tutta sopra o tutta sotto l'asse delle x, se l'area e' in parte sopra ed in parte sotto trovare le coordinate dei punti di intersezione della funzione con l'asse delle x e scomporre l'integrale in tanti integrali con il segno appropriato
- Se possibile sommare gli integrali in modo da semplificare i calcoli
- Calcolare la funzione primitiva $F(x)$ ed applicare la formula delle differenze.

(2) Qualche esempio di calcolo di aree

Vediamo alcuni esercizi sul calcolo di aree.

1) Calcolare l'area della regione di piano compresa fra la parabola.

$$y = x^2 - 4 \text{ e la retta } y = 5$$

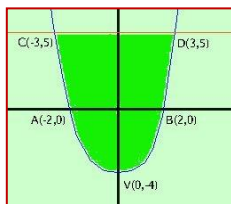
Calcolare l'area della regione di piano compresa fra la parabola

$$y = x^2 - 4 \text{ e la retta } y = 5$$

Come prima cosa facciamo la rappresentazione grafica

Calcoli

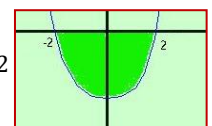
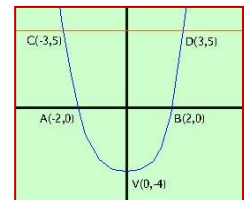
L'area che devo trovare e' quella indicata con il verde piu' scuro .



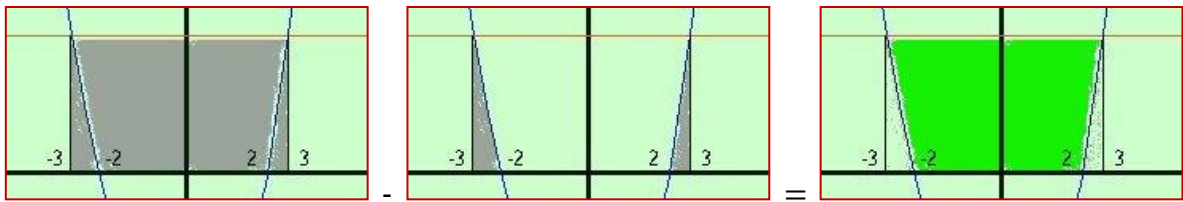
Tale area e' in parte sopra ed in parte sotto l'asse delle x, quindi studiamole nei particolari:

Per fare l'area sotto l'asse x bastera' fare l'integrale della parabola da -2 a 2 e cambiarlo di segno .

Soluzione:



Per fare l'area sopra l'asse delle x prima faremo l'integrale da -3 a 3 della retta e poi toglieremo l'area compresa fra la parabola e l'asse x da -3 a -2 e anche da 2 a 3:



Quindi per calcolare l'area devo fare:

$$A = \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx + \int_{-3}^3 5 dx - \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) dx - \int_2^3 (x^2 - 4) dx =$$

essendo tutti gli integrali con estremi diversi non posso sommare niente e faccio tutte le integrazioni:

$$= - \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 + [5x]_{-3}^3 - \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-3}^{-2} - \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^3 =$$

$$= - \left[\frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8 \right] + [15 + 15] - \left[-\frac{8}{3} + 8 + 9 - 12 \right] - \left[9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 \right] =$$

$$= 16 - 16/3 + 30 + 8/3 - 5 + 8/3 - 5 = 36$$

Quindi l'area cercata vale 36 unita' quadrate del piano.

Nota: sviluppare bene i calcoli perche' e' facilissimo sbagliare un segno

- 2) Calcolare l'area della regione di piano compresa fra la parabola $y = x^2 - 5x + 6$ e la retta $y = 2x$

[Soluzione](#)

- 3) Calcolare l'area della regione di piano compresa fra le due parabole $y = x^2 - 3x + 2$ e $y = -x^2 + x - 2$

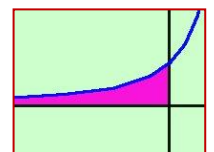
[Soluzione](#)

- 4) Calcolare l'area della regione di piano compresa fra la curva $y = e^x$ e la retta $y = x(e-1) + 1$

[Soluzione](#)

d) Integrali generalizzati

Discutiamo in questa pagina il caso in cui l'area della regione di piano sia illimitata, il che non vuol dire che sia infinita.



Vogliamo calcolare l'area della regione di piano compresa fra la curva $y = e^x$ e l'asse delle x da meno infinito sino al punto zero

L'area da trovare e' quella in viola; useremo questa proprieta' che applicheremo ogni volta che avremo un'area illimitata:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [F(x)]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a)$$

Cioe' se abbiamo un integrale sino ad infinito (od anche sino ad un punto dove la funzione non e' definita) bastera' fare prima l'integrale e successivamente fare il limite della funzione ottenuta.

Quindi nel nostro caso faremo:

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx =$$

siccome l'integrale di e^x vale sempre e^x avremo:

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 = e^0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = 1 - 0 = 1$$

Qualche testo, quando non c'è possibilità di errore invece di fare il limite usando la lettera a o b preferisce usare la x ; teoricamente sarebbe un errore anche se non cambia nulla nel risultato.

Quindi l'area cercata vale 1.

Nota: da un lato abbiamo la funzione e^x che si avvicina all'asse x in modo asintotico, cioè dopo centinaia di chilometri ancora non tocca l'asse delle x ; se vado a calcolare la distanza tra la funzione e l'asse x dopo soli 100 metri vedo che vale:

$$e^{-100} = \frac{1}{e^{100}}$$

cioè già dopo soli 100 metri la distanza fra la curva e l'asse x è di molti ordini di grandezza inferiore al diametro di un atomo!

Per questo non c'è da meravigliarsi se l'area totale vale una unità quadrata di misura del piano.

Se ci pensi bene quest'esempio ti fa anche vedere l'abisso che c'è fra la matematica come scienza esatta e le scienze applicate.

Esercizi:

1) Calcolare l'area della regione di piano compresa fra la curva $y=1/x$ e l'asse delle x tra gli estremi 0 ed 1 [soluzione:](#)

Facciamo la rappresentazione grafica dell'area cercata ricordando che la funzione $y=1/x$ è l'iperbole equilatera riferita ai propri assi.

L'area cercata è quella evidenziata.

Faremo:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx =$$

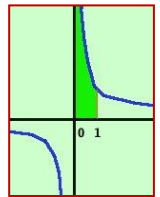
Sorge un problema: per $x=0$ la funzione $y=1/x$ non è definita e quindi dovremo fare

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{x} dx =$$

siccome l'integrale di $1/x$ vale $\log x$ (logaritmo naturale di x) avremo:

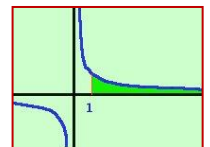
$$= \lim_{a \rightarrow 0} [\log x]_a^1 = \log 1 - \lim_{a \rightarrow 0} \log a = 0 - (-\infty) = 0 + \infty = +\infty$$

L'area compresa nella regione in questo caso è infinita.



2) Calcolare l'area della regione di piano compresa fra la curva $y=1/(x^2)$ e l'asse delle x da 1 a più infinito [soluzione:](#)

Facciamo la rappresentazione grafica dell'area cercata ricordando che la funzione $y=1/(x^2)$ è come l'iperbole dell'esercizio precedente ma con i rami che si avvicinano più rapidamente agli assi.



L'area cercata è quella evidenziata.

Sarebbe:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

e quindi faremo:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx =$$

l'integrale di $1/(x^2)$ vale $-1/x$ [vedi tabella](#)

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a =$$

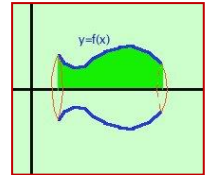
$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} -\frac{1}{a} - (-1) = 0 + 1 = 1 =$$

L'area compresa nella regione in questo caso è finita e vale un'unità quadrata del piano.

e) Volumi di solidi di rotazione

Di solito ai licei scientifici questo è l'ultimo argomento sugli integrali anche perché il tempo a disposizione per la preparazione degli esami non basta mai, quindi tutta la parte successiva dell'analisi (integrali curvilinei, integrali doppi, tripli, ecc) viene trattata solamente nel biennio universitario e non farà parte di questo corso (almeno per ora).

Il problema che vogliamo risolvere è come trovare il volume di un solido ottenuto dalla rotazione dell'area compresa fra una curva e l'asse delle x. Nella figura qui a fianco vorremmo trovare il volume di quella specie di vaso rovesciato ottenuto ruotando l'area compresa fra la curva $y=f(x)$ e l'asse delle x (quella marcata in verde).



La formula che utilizzeremo sarà:

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

In pratica significa che per ogni punto della funzione tracci la verticale $f(x)$ e poi trovi l'area del cerchio di raggio $f(x)$ con la formula πr^2 , poi facendo l'integrale sommo tutte le aree dei cerchi ed ottengo il volume; essendo π una costante, lo estraggo dall'integrale.

Come esempio troviamo:

- 1) il volume del cilindro
- 2) il volume del cono
- 3) il volume della sfera

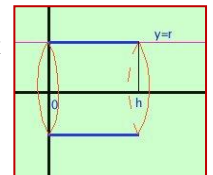
Volume del cilindro

Vediamo come trovare il volume del cilindro.

Consideriamo la retta orizzontale a distanza r dall'asse x ($y = r$) e consideriamo sull'asse x l'intervallo da 0 ad h ; troveremo il volume del cilindro di raggio r ed altezza h .

Applico la formula:

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi [r^2 x]_0^h = \pi r^2 h - \pi r^2 0 = \pi r^2 h$$



Volume del cono

Vediamo come trovare il volume del cono:

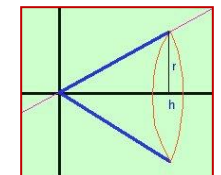
consideriamo la retta obliqua passante per l'origine ($y = mx$) e consideriamo sull'asse x l'intervallo da 0 ad h ; troveremo il volume del cilindro di raggio r ed altezza h , considerando come r l'ordinata che si trova ad ascissa h .

Notiamo che per la formula della [retta per l'origine](#) abbiamo:

$$m = \frac{r}{h}$$

Applico la formula:

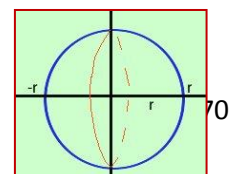
$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \left[\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} - \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{0^3}{3} = \pi \frac{r^2 h}{3}$$



Volume della sfera

Vediamo come trovare il volume della sfera:

consideriamo la circonferenza di centro l'origine e raggio r ($x^2 + y^2 = r^2$) e consideriamo sull'asse x l'intervallo da $-r$ ad r ; troveremo il volume della sfera di raggio r .



Esplicitiamo la y:

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Il piu' e meno significa che sono considerate sia la semicirconferenza sopra l'asse x che quella sotto l'asse x: a noi ne basta una; consideriamo la semicirconferenza sopra l'asse delle x:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Applico la formula ricordando che il quadrato e la radice si annullano reciprocamente:

$$v = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

J. *Brevi cenni sulle equazioni differenziali*

Nota bene! L'argomento e' trattato in modo del tutto insufficiente per uno studio universitario.

Alle scuole medie superiori le equazioni differenziali di solito non si fanno: mi e' capitato solamente di farle in un istituto tecnico industriale e limitatamente alle equazioni differenziali di tipo piu' semplice, pertanto ci limiteremo a questo nell'esposizione. Rimandiamo a corsi universitari per uno studio sistematico delle equazioni differenziali.

4. Perche' le equazioni differenziali

Soprattutto nelle scienze applicate e' importante poter risalire da dei dati alla funzione che li determina; questo equivale a costruire delle equazioni (equazioni funzionali) in cui le incognite, cioe' i dati da trovare, sono delle funzioni.

Le equazioni differenziali appartengono a questo genere di equazioni

Quindi per lo studio di qualunque disciplina scientifica le equazioni differenziali saranno indispensabili.

5. Definizione di equazione differenziale ordinaria

Si definisce equazione differenziale ordinaria di ordine n un'equazione che abbia come incognita una funzione y(x) e che leghi fra loro la variabile x, la funzione y(x) e le prime n derivate della funzione y:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

L'ordine e' dato dall'ordine piu' alto delle derivate che sono coinvolte.

Noi studieremo alcune equazioni differenziali ordinarie di primo ordine, cioe' con le incognite:

$$x, y(x), y'(x)$$

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

6. Equazioni differenziali ordinarie di primo ordine

Abbiamo gia' detto che le equazioni differenziali ordinarie di primo ordine sono quelle con le incognite x, y(x), y'(x):

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

Risolvere un'equazione differenziale significa determinare la forma della funzione y(x) che chiameremo anche integrale dell'equazione differenziale.

Come in tutti gli integrali troveremo le soluzioni con presente anche una costante (integrale generale); nei problemi di applicazione per poter determinare la costante avremo bisogno di una condizione iniziale data: sostituendo tale condizione all'integrale trovato sarà possibile determinare il valore della costante e quindi risolvere il problema (approfondire in seguito).

Tratteremo i seguenti casi:

- equazioni differenziali a variabili separabili
- equazioni omogenee del primo ordine
- equazioni lineari del primo ordine
- equazione di Bernoulli

Per indicare le funzioni :

$$y(x), y'(x), y''(x)$$

d'ora in avanti useremo la notazione y, y', y''

od anche :

$$y \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

a) Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine a variabili separabili

Diremo che un'equazione differenziale è a variabili separabili se possiamo separare le x e le y mettendo tutti i termini con le x prima dell'uguale e quelli con le y dopo l'uguale (o viceversa).

Esempio: risolvere l'equazione differenziale:

$$y = 2 y'$$

scriviamola come:

$$y = \frac{2dy}{dx}$$

separiamo le variabili: otteniamo:

$$dx = \frac{2}{y} dy$$

ora integriamo da entrambe le parti (metteremo sempre la costante come ultimo termine dopo l'uguale):

$$\int dx = 2 \int \frac{dy}{y}$$

sono tutti integrali immediati ed otteniamo:

$$x = 2 \log y + k$$

Al solito per $\log y$ si intende il logaritmo naturale di y .

Esplicito rispetto alla y :

$$\log y = x/2 - k/2$$

applico l'esponenziale:

$$e^{\log y} = e^{x/2 - k/2}$$

semplifico:

$$y = e^{x/2 - k/2}$$

Per le proprietà delle potenze posso scrivere:

$$y = e^{x/2} \cdot e^{-k/2}$$

Quindi, ponendo $e^{-k/2} = c$ l'integrale generale è:

$$y = c e^{x/2}$$

Vediamo un altro esempio. Risolvere l'equazione differenziale.

$$xy' = y$$

scriviamola come.

$$x \frac{dy}{dx} = y$$

Separiamo le variabili: otteniamo

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

ora integriamo da entrambe le parti:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Sono tutti integrali immediati ed otteniamo:

$$\log y = \log x + c$$

Al solito per log si intende il logaritmo naturale.

Metto la costante in forma di logaritmo $c = \log k$ per poter poi togliere i logaritmi [vedi logaritmo di un prodotto](#).

$$\log y = \log x + \log k$$

$$\log y = \log kx$$

quindi l'integrale generale è:

$$y = kx$$

con k costante.

b) Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine omogenee

Diremo che un'equazione differenziale è omogenea del primo ordine se è del tipo:

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Con $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ polinomi omogenei dello stesso grado.

Un polinomio è omogeneo se tutti i suoi monomi hanno lo [stesso grado](#);

se un'equazione è omogenea le sue soluzioni oltre le nulle sono del tipo $y = kx$ con k costante.

Per risolvere un'equazione di questo tipo consideriamo la variabile ausiliaria:

$$u = \frac{y}{x}$$

e quindi lasceremo le x ed al posto delle y avremo:

$$y = ux \quad dy = xdu + udx$$

In questo modo l'equazione diventa a variabili separabili, separeremo le x dalle u ed integreremo; dopo risostituiremo alla u il valore y/x .

Vediamolo su un esempio: risolvere l'equazione differenziale:

$$y'(x^2 - y^2) = xy \quad \text{con } x^2 - y^2 \neq 0$$

scriviamola nella forma tipica:

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

cioè:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

Ora sostituisco a y e dy la nuova variabile:

$$\frac{xdu + udx}{dx} = \frac{x \cdot ux}{x^2 - u^2x^2}$$

$$\frac{xdu + udx}{dx} = \frac{ux^2}{x^2(1 - u^2)}$$

semplifico gli x^2 dopo l'uguale:

$$\frac{xdu + udx}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}$$

Facciamo il minimo comune multiplo:

$$(1 - u^2)(xdu + udx) = u dx$$

calcolo:

$$xdu + udx - u^2xdu - u^3dx = udx$$

elimino udx:

$$xdu - u^2xdu - u^3dx = 0$$

Sposto il termine con dx dopo l'uguale:

$$xdu - u^2xdu - u^3dx = 0$$

$$xdu - u^2xdu = u^3dx$$

raccolgo la xdu prima dell'uguale:

$$xdu(1 - u^2) = u^3dx$$

separiamo le variabili: otteniamo:

$$\frac{(1 - u^2)du}{u^3} = \frac{dx}{x}$$

ora integriamo da entrambe le parti; prima dell'uguale separo i termini della somma:

$$\int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

sono tutti integrali immediati ed otteniamo:

$$-1$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \log u = \log x + c$$

$$2u^2$$

Mettiamo la costante come logaritmo $c = \log k$:

$$\frac{-1}{2u^2} - \log u = \log x + \log k$$

$$\frac{-1}{2u^2} = \log u + \log x + \log k$$

usando la proprietà del logaritmo di un prodotto:

$$\frac{-1}{2u^2} = \log(kux)$$

Ora metto y/x al posto di u :

$$\frac{-x^2}{2y^2} = \log(ky)$$

Quindi l'integrale generale è:

$$\frac{-x^2}{2y^2} = \log(ky)$$

a) Equazioni differenziali del primo ordine lineari

Diremo che un'equazione differenziale è lineare se la y e la y' hanno lo stesso grado.
(nel nostro caso 1)

L'equazione avrà la forma:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni nella variabile x .

Distinguiamo fra:

- lineari omogenee
- lineari non omogenee

(1) Lineari omogenee

La nostra equazione è del tipo:

$$y' + p(x)y = 0$$

Con $p(x)$ espressione in x .

Per risolverla è sufficiente osservare che è un'equazione differenziale a variabili separabili.

In effetti:

$$y' + p(x)y = 0$$

scriviamola come:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx$$

ora integriamo da entrambe le parti:

$$\log y = - \int p(x) dx + k$$

con k costante e $\log y$ logaritmo naturale di y .

Per ricavare la y applico l'esponenziale ad entrambe i membri:

$$e^{\log y} = e^{-\int p(x) dx + k}$$

e quindi, ricordando che l'esponenziale e' l'inverso del logaritmo e la loro composizione restituisce l'argomento:

$$y = e^{-\int p(x) dx + k} \cdot e^k$$

ho usato la proprieta' delle potenze per passare dalla somma degli esponenti al prodotto delle potenze e ponendo $e^k = c$ otteniamo la formula risolutiva finale:

$$y = c e^{-\int p(x) dx}$$

Non so se hai notato, ma abbiamo posto la costante uguale a k in modo da poter usare c nella formula finale: in matematica spesso si cerca di arrivare ad una formula finale con lettere prefissate ed in tal caso le lettere che servono prima del risultato finale contano poco e si usano solo per l'occasione.

Esempio:

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' + y \operatorname{sen} x = 0$$

in questo caso abbiamo $p(x) = \operatorname{sen} x$

Applicando la formula ottengo:

$$y = c e^{-\int \operatorname{sen} x dx}$$

e siccome l'integrale di $\operatorname{sen} x$ e' $-\cos x$ ottengo come integrale generale

$$y = c e^{\cos x}$$

(2) Lineari non omogenee

Come prima stesura mi limito a fornire la formula risolutiva ed un esempio di soluzione

La nostra equazione e' :

$$y' + p(x) y = q(x)$$

Con $p(x)$ e $q(x)$ espressioni in x .

Utilizzeremo la formula risolutiva:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + k \right]$$

con k costante.

Risolviamo l'equazione:

$$y' + y \operatorname{tang} x = \operatorname{sen} x$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$p(x) = \operatorname{tang} x \quad q(x) = \operatorname{sen} x$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$y = e^{-\int \operatorname{tang} x dx} \left[\int \operatorname{sen} x \cdot e^{\int \operatorname{tang} x dx} dx + k \right] =$$

L'integrale di $\operatorname{tang} x$ e' $-\log(\cos x)$

sostituiamo:

$$= e^{-\log(\cos x)} \left[\int \operatorname{sen} x \cdot e^{\log(\cos)} dx + k \right] =$$

$$= e^{\log(\cos x)} \left[\int \operatorname{sen} x \cdot e^{\log(\cos)} dx + k \right] =$$

per la **proprietà** del logaritmo di una potenza:

$$= e^{\log(\cos x)} \left[\int \sin x \cdot e^{\log(\cos^{-1} x)} dx + k \right] =$$

ricordando che l'esponenziale e' l'inverso del logaritmo naturale e che $\cos^{-1} x = 1/\cos x$

$$= \cos x \left[\int \frac{\sin x}{\cos x} + dx + k \right]$$

ed otteniamo:

$$= \cos x (-\log \cos x + k) \text{ Ecco i calcoli:}$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

il termine sopra ($\sin x$) e' la derivata con il segno cambiato del termine sotto ($\cos x$) quindi e' un integrale di tipo logaritmo

$$= -\log(\cos x)$$

Tralascio la costante.

b) Equazione di Bernoulli

E' un'equazione che si può ridurre ad un'equazione lineare.

La nostra equazione e' :

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

Con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni continue.

Per risolverla dividiamo tutto per y^n :

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \frac{y}{y^n} = q(x)$$

Semplifico:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$$

ora pongo :

$$\frac{1}{y^{n-1}} = z \text{ equivale a dire } z = y^{1-n}$$

da cui ottengo, derivando (ricorda che y e' una funzione e quindi devi terminare con y'):

$$z' = (1-n) \frac{y'}{y^n}$$

quindi sostituisco nel primo passaggio dell'equazione :

$$a \frac{1}{y^{n-1}} = z \text{ ed a } \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}$$

ed ottengo:

$$\frac{z'}{1-n} + zp(x) = q(x)$$

o meglio, facendo il minimo comune multiplo :

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

che e' una funzione lineare non omogenea del primo ordine.

Risolviamo l'equazione:

$$y' + xy = x y^2$$

Per risolverla divido tutto per y^2 :

$$\frac{y'}{y^2} + x \frac{y}{y^2} = x$$

simplifico :

$$\frac{y'}{y^2} + x \frac{1}{y} = x$$

pongo :

$$\frac{1}{y} = z$$

da cui :

$$z' = -\frac{y'}{y^2}$$

e quindi sostituendo:

$$-z' + xz = x$$

o meglio:

$$z' - xz = -x$$

appliciamo la formula risolutiva:

$$z = c e^{-\int -x dx} [\int x \cdot e^{\int x dx} dx + k] =$$

L'integrale di $x e^{x^2/2}$

$$z = c e^{(x^2)/2} [\int x \cdot e^{(x^2)/2} dx + k] =$$

Risolviamo l'integrale

Risolviamo l'integrale:

$$\int x e^{(x^2)/2} dx$$

per sostituzione poniamo:

$$t = \frac{x^2}{2}$$

da cui

$$dt = x dx$$

sostituisco in

$$\int e^{(x^2)/2} x dx$$

ed ottengo:

$$\int e^t dt = e^t$$

rimetto la sua variabile ed ottengo come valore dell'integrale

$$e^{(x^2)/2}$$

per sostituzione ed otteniamo:

$$= c e^{(x^2)/2} [e^{(x^2)/2} + k] =$$

moltiplichiamo:

$$= c e^{(x^2)/2 + (x^2)/2} + ck e^{(x^2)/2} =$$

ed otteniamo l'integrale generale:

$$= c e^{x^2} + ck e^{(x^2)/2}$$

con c e k costanti.

FINE ANALISI